センター数学ⅡB を受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**センター数学ⅡB に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　それをお話する前に，まず皆さんには**「公式とそれを使う技術」**がきちんと身についていますか？ 特に高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんは着実に技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚された時には，スタディサプリ**「高１・高２ スタンダード数学」「高１・高２ ハイレベル数学」**などを利用して，速やかに技術を再び磨いておいてください。

「プロセス」が重視されるべきである数学では，その本当の力をマーク式で判断することは難しいわけですが，そもそもセンター試験の数学は，マーク式でありながらも，問題を解いている間は**記述式の試験と変わりません**。答えにたどり着くまでに頭を働かせ，手を動かし，そして出した答え「だけ」をマークする。その答えだけで判断される。恐ろしいですね…。さらに，問題の意図を理解し，たとえ別の解き方があろうとも**誘導に沿うように**解き，最後まで正確に計算し，それをマークする。それをたった60分ですべて行うために，**思考・計算両方のスピードと正確性**が必要です。

また，誘導といっても，親切なものばかりではなく，かなり強引な，一般的ではない，問題を成立させるためだけの誘導も存在します。ですから，うまく誘導に乗りながらも，どこかちょっと離れたところから問題を眺める視点や余裕をもっていなければいけないのです。つまりこの誘導によって自分が今「やらされている・やらされようとしている」ことの「意味」いわば「真意」をつかむためには，**国公立２次試験に匹敵するような数学の力や，時にはそれ以上の力が必要**であることはいうまでもありません。

このテキストは，まずはそのために必要な**基礎力を自分で確認**し，さらになかなか自然に養われることのない**「問題のとらえ方」を養成**するための問題が厳選されています。過去問題を中心に作成されていますが，過去問を自分で闇雲にやっても決して得られることのない**「充実感」**と真の実力を自分でつけていくために必要な**「問題に対する考え方」**が満載です。

そして率直に言います。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。この講座で身につけたスキルを使って，**真の実力を身につけるための演習を積む**必要があります。そのために**必要な問題集もご紹介**いたします。何も知らない状態で問題集をやるのは，何の準備もしないで闘いに出るようなもの。しかし，この講座を受けた後は，自信を持って進むことができるでしょう。

講が進むたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間をたてば自動的に閉まりますよ。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り拓いた時**です。一歩一歩，自分の目指すべき大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時，私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

＜センター数学ⅡB　目次＞

第１講　三角関数①
第２講　指数・対数関数①
第３講　三角・指数・対数関数②
第４講　微分法・積分法①
第５講　微分法・積分法②
第６講　微分法・積分法③
第７講　数列①
第８講　数列②
第９講　ベクトル①
第 10 講　ベクトル②
補講　図形と方程式

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

まずは「CHECK&UP」の問題をノート等に解きましょう。センター試験とはいえ，数学はすべて実際に手を動かして計算しなければいけません。マーク式の答えの形や誘導に頼らずに自力で解けてほしい問題を厳選してあります。解き終えたら「解答」を見て，答えのみならず「解き方」について確認をしておきましょう（第６講と補講には「CHECK&UP」はありません）。

つぎに「講義問題」です。1～3の３問構成です。「CHECK&UP」で確認した知識を元に，まずは何も見ないで問題をノート等に解いてみましょう。特に時間を計る必要はありません。センター試験は時間との戦いですが，その短縮のためには「まずは解けること」が最低条件です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。問題が掲載されているページは全て見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。 それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分

なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれません。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いしますよ。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

③　復習について　その1

授業で扱ったポイントを頭に描きながら，まずは問題をもう一度解いてみましょう。予習でできた部分はスピードアップを，できなかったところは確かめるようにゆっくりと。一回目の復習は緩急をつけることが大切です。止まってしまった場合はNote欄を参照してください。それでも忘れてしまった場合はもう一度講義を見直しましょう。そのようにして最後まで解ききったとき，その問題があなたにどんなスキルや考え方を要求したのかを，全体を見回して確認しておきましょう。

そして二回目以降は自分でできる「最高速」で問題を解いてみましょう。必ず一通り通すこと。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。センター数学は1問にかかる時間は多くて20分前後です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となるでしょう。

④　復習について　その2

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講3題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度も様々です。解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。

以上を確実に繰り返すことにより，必ずやセンター試験の数学ⅡBを攻略するための「確固たる土台」ができあがります。そこからは過去問や後述する問題集で経験を積んでいくだけです。みなさんの日々の努力，期待しています。

☆センター数学ⅡB 「おすすめの問題集」☆

この講義が終了したら，または同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます。学校の授業で課せられた課題等とのバランスを見ながら，着々と進めて行きましょう。

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものは全くお勧めできません。答えに行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです。最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません。自分で考えれば必ず答えにたどり着く！とおっしゃられる方もおりますが，「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が全く考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えるでしょう。受験勉強，特に受験が近づいてきている時期に求められるのは，「時間対効果」です。

さて，そもそも選択式ではないセンター数学においては，まずは記述ができる，すなわち典型的な「解法の流れ」がわかっている状態が望ましいのです。よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とすべく。

そして，いざ練習段階となればより良問が厳選されているセンター試験向けの問題集が望ましいことは言うまでもありません。学校で購入したものや配布されたものに加え，さらなる訓練を積むための良本が存在します。上記したように「流れ」が大切なセンター試験ですから，単問が並ぶだけの「マーク式問題集」は必ずしもセンター試験対策とはなりません。注意してください。

以下に挙げるのは上記の考えに基づいた本です。良問を通じた日々のたゆまぬ訓練，それはセンター試験のみならず私大・２次試験の記述にもつながっていくのです。

【センター試験のための基礎固め】

・「大学入試 短期集中ゼミ センター編 センター数学ⅡB」（実教出版）

定評のある「10 日あればいい」シリーズのセンター編。基礎力定着のための本。
教科書にかかれていない解法のテクニックをうたっていますが，突飛なものではなく
数学の本質に基づく堅実な基礎力がつくでしょう。

【実戦問題集】

・マーク式総合問題集　数学Ⅱ・B （河合塾シリーズ）

通称「黒本」。過年度の「全統マーク模試（河合塾主催）」の問題を厳選収録。

・大学入試センター試験実戦問題集　数学Ⅱ・B （代々木ライブラリー）

通称「白本」。過年度の「全国センター模試（代ゼミ主催）」の問題を厳選収録。

・大学入試センター試験実戦問題集　数学Ⅱ・B　(駿台文庫)

通称「青本」。過年度の「駿台全国，駿台・ベネッセマーク模試」の問題を厳選収録。

・センター試験実戦模試　Ⅱ・B　(Z会出版編集部)

通称「緑本」。Z会オリジナル模試＋予想模試を掲載。

・センター試験過去問研究　数学Ⅰ・A／Ⅱ・B　(教学社)

通称「赤本」。有名な過去問題集のセンター試験版。

センター試験　本試を収録（直近の年度については追試も収録）。

まずはセンターに向けた標準的な力がついているか試したい時は「白本」，センターレベル前後の力を養成したいのであれば「黒本」，センターを（遙かに）越えたレベルの問題で実力をつけたいのであれば「青本」「緑本」がお勧めです。

ちなみにこの色本ですが，大問1～4をすべて通して解く必要はありません。他の科目の勉強と同じように，強化したい「同じ分野の問題」を立て続けにやると必要な知識がどんどん積み重なって効果的でしょう（例えば「微分法・積分法」の問題ばかりを7回分やる，など)。

☆センターの過去問を使った対策について☆

「赤本」などの「センターの過去問」には，講座の復習や色本による十分な練習が終了した後に手をつけることとなるでしょう。さて，2015年からの課程（現行課程）の出題範囲は，数学ⅡBに関しては前課程と大きく変わるところはありません。

【現行課程（2015年～)】
【前課程（2006年～2014年)】

1 ［1］三角関数または図形と方程式（15点）
　［2］指数・対数関数（15点）
2 微分法・積分法（30点）
3 ベクトル（20点）
4 数列（20点）

【前々課程（1997年～2005年)】

1 ［1］三角関数（15点）
　［2］指数・対数関数（15点）
2 微分法・積分法（30点）
3 ベクトル（20点）
4 複素数平面（20点）
※数列は「ⅠA」3

前課程（2006年～2014年）の過去問については，現行課程と変わらず演習に使うことができますが，前々課程（1997年～2005年）については，問題を解く際のポイントとして以下をおさえていただきたいと思います。

・三角関数　→　基本的な三角方程式・不等式や相互関係・加法定理・倍角の公式・合成などを確認するために使用できる。比較的現行課程に近いが，やや基礎的かつ誘導が少ない。

・指数・対数関数　→　大きくは変わらないが，現行課程に比べて誘導が少ない年もあり，その場合は記述試験としての力が試される。
・微分法・積分法　→　知識の練習にはよいが，現行課程で見られる「流れ」を感じさせる問題がほとんど見られない。
・ベクトル　→　大きく異なる点はないが，やや「典型的」な問題が現行課程に比べて多い。また現行課程に比べて誘導が少ない年もあり，力が試される。
・数列　→　「典型的」な問題が多い。また誘導形式とは言いがたい（ただ答えだけをマークさせる）問題が散見される。

前々課程の数学の問題は，現行課程とは似て非なる問題です。また年度が古くなればなるほど「単発」，つまりプロセスを自分で構築して答えのみをマークしていく問題が増えると考えていただいて結構です。現行課程の問題は，「誘導を理解」し，ときに「マークから推測しながら」問題を解き進めることが必要であり，また計算においてもやり直す時間が限られるなど厳しい「時間的制約」に悩まされることでしょう。それを打破するための「各分野ごとの下地作り」としては前々課程の問題は使えますが，全体を通じて 60 分で解いてみる，という使い方はできません。

また，大問 1 において「図形と方程式」が出題される場合は，基本的な公式を利用すれば解ける問題が多く見られます。点・直線・円の典型的な問題について，その解法を今一度おさえておきましょう。

最後に，60 分の「時間配分」は，各分野の問題を「解ききる力」がある程度以上ついた人が考えることです。同じ問題を繰り返し解くことで速度が上がり，また「流れ」が身につきます。逆に，一度しか解かなくてよい問題があるとすれば，それは「全く意義が感じられない」かつ「スピードアップが限界を迎えた」「流れが完全に把握できている」問題に限るといってもよいでしょう。そう感じることができる日まで，特に時間的に厳しいと感じる問題を中心に何度も色本や過去問，模試を解き直し，センターの問題の「流れ」を体に覚え込ませましょう。

第１講　三角関数①

【CHECK & UP】

1　原点Ｏ中心とする半径２の円周上にある点をＰとする．線分 OP が x 軸の正の方向となす角を θ とするとき，点Ｐの座標を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

2　[1]　$0 \leqq \alpha < 2\pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ のとき，次の方程式・不等式を満たす α，β を求めよ．

(1)　$\sin\alpha = \cos\alpha$　(2)　$\sin\alpha > \cos\alpha$　(3)　$\sin 2\beta < \cos 2\beta$

[2]　次の□に＋，－，π，$\frac{\pi}{2}$ のうち当てはまるものを入れよ．

(1)　$\sin\theta = \square\sin(\square - \theta)$　(2)　$\cos\theta = \square\cos(\square - \theta)$

(3)　$\sin\theta = \square\cos(\square - \theta)$　(4)　$\cos\theta = \square\sin(\square - \theta)$

[3]　次の各場合において α を β を用いて表せ．

(1)　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\sin\alpha = \sin\beta$

(2)　$\pi \leqq \alpha \leqq 2\pi$，$\pi \leqq \beta \leqq 2\pi$，$\sin\alpha = \sin\beta$

(3)　$0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$，$0 \leqq \beta \leqq 2\pi$，$\cos\alpha = \cos\beta$

(4)　$-\pi \leqq \alpha \leqq \pi$，$-\pi \leqq \beta \leqq \pi$，$\cos\alpha = \cos\beta$

3　[1]　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1)　$2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$　(2)　$\cos 2\theta \leqq \sin\theta$

[2]　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき　$f(\theta) = \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\theta$ の最大値，最小値を求めよ．

[3]　$y = 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta - 2\cos\theta - 3$（$0 \leqq \theta < 2\pi$）について，次の問いに答えよ．

(1)　$x = \sin\theta + \cos\theta$ とおくとき，y を x の式で表せ．また x の取り得る値の範囲を求めよ．

(2)　y の最大値と最小値を求めよ．

[4]　$y = \cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$　$\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$　について，次の問いに答えよ．

(1)　y を $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ．

(2)　y の最大値，最小値を求めよ．またそれぞれの値をとる θ を求めよ．

4　[1]　２直線 $y = -3\sqrt{3}x + 1$ と $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

[2]　$\tan\theta = t$ とおくとき，次の式を t を用いて表せ．ただし $t \neq \pm 1$ とする．

(1)　$\tan 2\theta$　(2)　$\cos^2\theta$ および $\cos 2\theta$　(3)　$\sin 2\theta$

< Note >

1　[1]　a を正の定数とし，角 θ の関数　$f(\theta)=\sin(a\theta)+\sqrt{3}\cos(a\theta)$ を考える．

(1)　$f(\theta)=$ **ア** $\sin\left(a\theta+\dfrac{\pi}{\boxed{イ}}\right)$ である．

(2)　$f(\theta)=0$ を満たす正の角 θ のうち最小のものは $\dfrac{\boxed{ウ}}{3a}\pi$ であり，

小さい方から数えて 4 番目と 5 番目のものは，それぞれ $\dfrac{\boxed{エオ}}{3a}\pi$，

$\dfrac{\boxed{カキ}}{3a}\pi$ である．

[2]　A，B は $0<A<B$ を満たす定数とする．$0\leqq\theta<\pi$ の範囲で関数

$f(\theta)=A\sin^2\theta+(A+B)\sin\theta\cos\theta+B\cos^2\theta$　……①

の最大値が $10+2\sqrt{29}$，最小値が $10-2\sqrt{29}$ であるとする．

(1)　$A=b-a$，$B=b+a$ とおいて①の右辺を変形すると

$$f(\theta)=\boxed{ア}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\boxed{イウ}\sin\theta\cos\theta+\boxed{エ}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\boxed{オ}\theta+\alpha)+\boxed{エ}$$

となる．ただし，α は $\tan\alpha=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ を満たす角で $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(2)　$f(\theta)$ が最大となるのは $\theta=\dfrac{\pi-2\alpha}{\boxed{ク}}$ のときで，

最小となるのは $\theta=\dfrac{\boxed{ケ}\pi-2\alpha}{\boxed{コ}}$ のときである．

また，$f(\theta)$ の最大値，最小値の条件を用いると

$A=\boxed{サ}$，$B=\boxed{シス}$

であることがわかる．

＜ Note ＞

2　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ として

$$\sin\alpha = \cos 2\beta$$

を満たす β について考えよう．ただし，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ とする．

たとえば，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，β のとり得る値は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ の二つである．

このように，α の各値に対して，β のとり得る値は二つある．そのうちの小さい方を β_1，大きい方を β_2 とし

$$y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$$

が最大となる α の値とそのときの y の値を求めよう．

β_1，β_2 を α を用いて表すと，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}} - \frac{\alpha}{\boxed{\text{オ}}},\quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi + \frac{\alpha}{\boxed{\text{オ}}}$$

となり，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$ のときは

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}} + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ク}}},\quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ク}}}$$

となる．

したがって，$\alpha + \dfrac{\beta_1}{2} + \dfrac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi \leqq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$$

である．よって，y が最大となる α の値は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\pi$ であり，そのときの y の値は $\boxed{\text{ツ}}$ であることがわかる．$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ $\dfrac{1}{2}$　　① 1　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

＜ Note ＞

3 座標平面上の原点 O を中心とし，半径 2 の円を S とする．円 S 上の 2 点 A，B を

$$A(2\cos\theta,\ 2\sin\theta),\ B\left(2\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right),\ 2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

とする．ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする．

円 S 上の点 A，B における接線をそれぞれ l，m とし，l と m の交点を C とする．

(1) 線分 OC の長さは [ア] であり，点 C の座標は

$$\left([イ]\cos\left(\theta+\frac{\pi}{[ウ]}\right),\ [イ]\sin\left(\theta+\frac{\pi}{[ウ]}\right)\right)$$

である．

(2) 線分 AC の中点を P とし，直線 l と x 軸の交点を Q とする．点 P の座標は

$$([エ]\cos\theta-\sqrt{[オ]}\sin\theta,\ [エ]\sin\theta+\sqrt{[オ]}\cos\theta)$$

と表される．

三角形 OAC の面積が三角形 OQA の面積の 2 倍になるとき，点 P の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{[カ]}}{[キ]},\ \frac{[ク]\sqrt{[ケコ]}}{[キ]}\right)$$

である．

＜ Note ＞

第１講　三角関数①

1　[1]　a を $0<a<\pi$ を満たす角度とする．$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で関数

$$f(\theta)=\sin(\theta-a)-\sin\theta$$

を考える．

(1)　方程式 $f(\theta)=0$ の解 θ は a を用いて

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{ア}}+\frac{a}{2}$$

と表される．さらに，この解 θ が $\sin(\theta-a)=\frac{1}{2}$ を満たすならば

$$a=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$$

である．

(2)　a を(1)で求めた角度とするとき，関数 $f(\theta)$ は最大値 $\frac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ をとる．

また，$\theta=\frac{\pi}{\boxed{カ}}$ のとき最小値 $-\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる．

[2]　二つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$$

で定める．

$f(x)$ と $g(x)$ の和は $f(x)+g(x)=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}\sin\left(\boxed{ウ}x-\frac{\pi}{\boxed{エ}}\right)$

である．したがって，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で，$f(x)+g(x)$ は

$x=\frac{\pi}{\boxed{オ}}$ のとき最大値 $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる．

2　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で　$\sin 4\theta=\cos\theta$　……(1)　を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう．

一般に，すべての x について

$\cos x=\sin($ ア $-x)$

である． ア に当てはまるものを，次の⓪〜②のうちから一つ選べ．

⓪　π　　①　$\frac{\pi}{2}$　　②　$-\frac{\pi}{2}$

したがって，(1)が成り立つとき，$\sin 4\theta=\sin($ ア $-\theta)$ となり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で

4θ， ア $-\theta$ のとり得る値の範囲を考えれば，$4\theta=$ ア $-\theta$ または

$4\theta=\pi-($ ア $-\theta)$ となる．よって，(1)を満たす θ は $\theta=\frac{\pi}{\text{イ}}$ または

$\theta=\frac{\pi}{\text{ウエ}}$ である．

$\sin\frac{\pi}{\text{イ}}=\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ である．$\sin\frac{\pi}{\text{ウエ}}$ の値を求めよう．(1)より

キ $\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$

となり，この式の左辺を2倍角の公式を用いて変形すれば

(ク $\sin\theta-$ ケ $\sin^3\theta)\cos\theta=\cos\theta$

となる．ここで $\cos\theta>0$ であるから

ケ $\sin^3\theta-$ ク $\sin\theta+1=0$　……(2)

が成り立つ．$\sin\theta=\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ は(2)を満たしている．$\theta=\frac{\pi}{\text{ウエ}}$ とすると，

$\sin\theta\neq\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ であるから コ $\sin^2\theta+$ サ $\sin\theta-1=0$ となる．

ここで，$\sin\frac{\pi}{\text{ウエ}}>0$ より　$\sin\frac{\pi}{\text{ウエ}}=\frac{\text{シス}+\sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}}$ である．

3 a を正の定数とする．点 O を原点とする座標平面において，中心が O で，半径が 1 の円と半径が 2 の円をそれぞれ C_1，C_2 とする．$\theta \geqq 0$ を満たす実数 θ に対して，角 $a\theta$ の動径と C_1 との交点を P とし，角 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}$ の動径と C_2 との交点を Q とする．ここで，動径は O を中心とし，その始線は x 軸の正の部分とする．

(1) $\theta=\pi$ のとき，Q の座標は $(\sqrt{\boxed{ア}}, \boxed{イ})$ である．

(2) 3 点 O，P，Q がこの順に一直線上にあるような最小の θ の値は

$$\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}a+\boxed{オ}}\pi$$

である．θ が

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}a+\boxed{オ}}\pi$$

の範囲を動くとき，円 C_2 において点 Q の軌跡を弧とする扇(おうぎ)形の面積は

$$\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}a+\boxed{ク}}\pi$$

である．

(3) 線分 PQ の長さの 2 乗 PQ^2 は

$$\boxed{ケ}-\boxed{コ}\sin\left(\frac{\boxed{サ}a+\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\theta\right)$$

である．

(4) x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\boxed{ケ}-\boxed{コ}\sin\left(\frac{\boxed{サ}a+\boxed{シ}}{\boxed{ス}}x\right)$$

とおき，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものが 4π であるとすると，$a=\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である．

＜ Note ＞

第２講　指数・対数関数①

【CHECK & UP】

1　次の方程式・不等式を解け．

(1)　$3^{x-1}=9\sqrt[3]{3}$

(2)　$3^x<\dfrac{2}{3^x}-1$

(3)　$3^{x+1}=2$

2　次の方程式・不等式を解け．

(1)　$\log_4 x^2-2\log_x 2+1=0$

(2)　$\log_3(x-2)+\log_3(x-3)-\log_3(x+1)\leqq 0$

3　関数 $y=4\cdot 8^x-24\cdot 4^x+57\cdot 2^x-73+57\cdot 2^{-x}-24\cdot 4^{-x}+4\cdot 8^{-x}$ について次の問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，t の最小値を求めよ．

(2)　y を t で表せ．

(3)　$y=f(t)$ としたとき，$f(t)$ を因数分解せよ．また，$y=f(t)$ のグラフを考えることにより，y の最小値とそれをとる x の値を求めよ．

4　$\log_3 y\leqq 1+\log_3(x+2)$，$\log_3 y\leqq 1+\log_3(10-7x)$，$1+\log_3 y\leqq \log_3(20-3x)$ の表す領域 D について，次の問いに答えよ．

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x-2y$ の最小値を求めよ．

＜ Note ＞

1　[1]　(1)　関数 $f(x)=3^x+3^{-x}$ に対して $f(x-1)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\cdot 3^x+\boxed{\text{ウ}}\cdot 3^{-x}$ である．

また，$f(x-1)=f(x)$ を満たす x を求めると，$x=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，

このときの $f(x)$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

(2)　関数 $y=\log_2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$　……①　のグラフは，関数 $y=\log_2 x$　……②

のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ケコ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{サシ}}$ だけ平行移動したもの

である．

①と②のグラフの共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ス}},\ 1+\log_2\boxed{\text{セ}}\right)$ である．

[2]　p，q は実数で，$p>0$，$p\neq 1$ とする．x の方程式

$$5p^x-\frac{1}{p^x}=q\left(p^x+\frac{1}{p^x}\right)$$

を考える．

(1)　与えられた方程式が解をもつような q の範囲を求めよう．

与えられた方程式を変形すると

$$p^{\boxed{\text{ア}}x}\left(\boxed{\text{イ}}-q\right)=\boxed{\text{ウ}}+q$$

となる．この方程式が解をもつのは $\boxed{\text{イ}}-q$ と $\boxed{\text{ウ}}+q$ が同符号のときで

あるから，求める範囲は

$$\boxed{\text{エオ}}<q<\boxed{\text{カ}}$$

である．

(2)　$p=3$，$q=\dfrac{1}{2}$ のとき，$p^x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であるから $x=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

＜ Note ＞

2　［1］ 不等式 $2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5$　……(＊) が成り立つような x の範囲を求めよう．

(1) 不等式(＊)において，x は対数の底であるから　$x >$ [ア] かつ $x \neq$ [イ]

を満たさなければならない．また，$\log_x 27 = \dfrac{[ウ]}{\log_3 x}$ である．

(2) 不等式(＊)は

[ア] $< x <$ [イ] のとき　[エ] $(\log_3 x)^2 -$ [オ] $\log_3 x -$ [カキ] $\geqq 0$

$x >$ [イ] のとき　[エ] $(\log_3 x)^2 -$ [オ] $\log_3 x -$ [カキ] $\leqq 0$

と変形できる．したがって，求める x の値の範囲は

[ア] $< x \leqq \dfrac{\sqrt{[ク]}}{[ケ]}$，[イ] $< x \leqq$ [コサ]

である．

［2］ a を定数とする．不等式

$\log_2(x+a) + \log_2(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}(4-4a) < 0$　……(＊)

が成り立つような x の値の範囲を求めよう．

対数の真数は正であるから

$x >$ [アイ]，$x >$ [ウ]，$a <$ [エ]

である．また，不等式(＊)は

$(x +$ [オ] $-$ [カ] $)(x +$ [キ] $) < 0$

と変形できる．

したがって，不等式(＊)を満たす x の値の範囲は

$a < -$ [ウ] のとき [クケ] $< x <$ [コ] $-$ [サ]

$-$ [ウ] $\leqq a <$ [エ] のとき [シ] $< x <$ [ス] $-$ [セ]

である．

＜ Note ＞

3　a は実数とする．x の方程式

$$(2^x+3^x)\left(\frac{9}{2^x}+\frac{4}{3^x}\right)=a \quad \cdots\cdots ①$$

について考える．

(1)　$X=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ とおけば，方程式①は X を用いて

$$\boxed{\text{ア}}X+\frac{\boxed{\text{イ}}}{X}+\boxed{\text{ウエ}}=a \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

方程式②が異なる二つの正の解をもつのは

$$a>\boxed{\text{オカ}}$$

のときである．このとき，方程式①は異なる二つの解をもち，それらの和は $\boxed{\text{キク}}$

であることがわかる．

(2)　$a=50$ とする．方程式②の解は

$$X=\boxed{\text{ケ}},\ \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であるから，方程式①の解は

$$x=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\log_2 3-\boxed{\text{ス}}},\ \frac{\boxed{\text{セソ}}\log_2 3}{\log_2 3-\boxed{\text{ス}}}$$

となる．

＜ Note ＞

第２講　指数・対数関数①

1　x，t は実数で

$$\log_3(x+3^t)=2t-2$$

を満たしているとする．

（1）x は t を用いて

$$x=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\cdot 3^{\boxed{ウ}t}-\boxed{エ}^t$$

と表される．

（2）$t=0$ のとき，$x=\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である．

（3）$x=2\cdot 3^t$ のとき，$t=\boxed{ク}$ である．

（4）$x=-\dfrac{9}{4}$ のとき，$t=2-\log_3\boxed{ケ}$ である．

2　$a=\log_3 x$，$b=\log_9 y$ とする．

(1)　$y=9^b$ であるから，**ア** $b=\log_3 y$ である．

(2)　$x^2y=\dfrac{1}{3}$ ならば，$a+b=\dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}$ である．

(3)　$a+2b=3$ ならば，$x+y$ の最小値は $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である．

(4)　$ab=2$ ならば，$x>1$，$y>1$ のときの xy の最小値は **キク** である．

3 実数 a に対し，x の方程式

$$\log_4(x-1)+\log_4(4-x)=\log_4(a-x) \quad \cdots\cdots①$$

を考える．これを解くことは

$$1<x<4 \quad かつ \quad x<\boxed{ア}$$

の範囲で方程式

$$-x^2+\boxed{イ}x-\boxed{ウ}=a \quad \cdots\cdots②$$

を解くことと同じである．

(1) 2次方程式②は，$a=\boxed{エ}$ のとき重解 $x=\boxed{オ}$ をもつ．したがって，方程式①が，ただ一つの解をもつのは

$$a=\boxed{エ} \text{ または } \boxed{カ}<a\leqq\boxed{キ}$$

のときである．

(2) $a=\boxed{キ}$ のときの方程式①の解は，$x=\boxed{ク}$ である．そのときの①の右辺の値は

$$\frac{1}{\boxed{ケ}}$$

である．

＜ Note ＞

第３講　三角・指数・対数関数②

【CHECK & UP】

1　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフをかけ．

(2)　次の(ⅰ)～(ⅲ)の方程式を満たす θ の個数をそれぞれ求めよ．

(ⅰ)　$\cos\theta=1$　　(ⅱ)　$\sin 2\theta=\dfrac{1}{3}$　　(ⅲ)　$\cos 3\theta=\sin\theta$

2　x についての方程式 $2^x=t$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　$y=2^x$ のグラフをかけ．

(2)　①が $x=0$ を解にもつとき，t の値を求めよ．

(3)　①が正の解をもつときの t の取り得る値の範囲を求めよ．

(4)　①が負の解をもつときの t について，$y=t^x$ のグラフをかけ．

3　x についての方程式 $\log_3 x=t$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　$y=\log_3 x$ のグラフをかけ．

(2)　①の t が次の値および範囲にあるとき，①の解 x の取り得る値および範囲を求めよ．

(ⅰ)　$t=0$　　(ⅱ)　$t<0$　　(ⅲ)　$t \geqq 1$

(3)　①が $x=2$ を解にもつときの t について，$y=\log_t x$ のグラフをかけ．

(4)　①が $x=30$ を解にもつとき，t の整数部分を求めよ．

4　$\sin\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，θ について当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$　　①　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$　　②　$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$　　③　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

5　$2^n-2^m=12$ を満たす自然数 m，n を求めよ．

6　$a=\log_5 2^{1.5}$，$b=\log_5 3^{1.5}$，$c=\log_5 0.5^{1.5}$ のとき，1，a，b，c を小さい順に並べよ．

＜ Note ＞

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$5\sin\theta - 3\cos 2\theta = 3 \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たす θ について考えよう．

方程式$(*)$を $\sin\theta$ を用いて表すと

$$\boxed{ア}\sin^2\theta + 5\sin\theta - \boxed{イ} = 0$$

となる．したがって，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$\sin\theta = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

であり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でこの等式を満たす θ のうち，小さい方を θ_1，大きい方を θ_2 とすると

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{エ}},\quad \cos\theta_2 = \frac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{エ}}$$

である．

θ_1 について不等式 $\boxed{キ}$ が成り立つ．$\boxed{キ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{12}$　① $\frac{\pi}{12} < \theta_1 < \frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{\pi}{5}$

③ $\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$　④ $\frac{\pi}{4} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$　⑤ $\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$

ただし，必要ならば，次の値

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

を用いてもよい．

さらに，不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小のものは $\boxed{ク}$ である．

＜ Note ＞

2　[1]　自然数 x で，条件

$$12(\log_2\sqrt{x})^2-7\log_4 x-10>0 \quad \cdots\cdots①$$

$$x+\log_3 x<14 \quad \cdots\cdots②$$

を満たすものを求めよう．

まず，x を正の実数として，条件①を考える．①は $X=\log_2 x$ とおくと

$$6X^2-\boxed{\text{ア}}X-\boxed{\text{イウ}}>0$$

となる．この 2 次不等式を解くと　$X<-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}<X$　となる．

したがって，条件①を満たす最小の自然数 x は $\boxed{\text{ク}}$ であり，$\boxed{\text{ク}}$ 以上のすべての自然数 x は①を満たす．

次に，条件②について考えると，②を満たす最大の自然数 x は $\boxed{\text{ケコ}}$ であり，$\boxed{\text{ケコ}}$ 以下のすべての自然数 x は②を満たす．

したがって，求める x は $\boxed{\text{ク}}$ 以上 $\boxed{\text{ケコ}}$ 以下の自然数である．

[2]　正の数 x に対して

$$a=\log_3 x-\frac{7}{2},\ b=\log_3 x-\frac{5}{2},\ c=\log_9 x-\frac{5}{2},\ d=\log_9 x-\frac{3}{2}$$

とおく．

(1)　$d=0$ となるような x の値は $x=\boxed{\text{アイ}}$ である．

(2)　$abcd>0$ となるような x の値の範囲を求めよう．

a，b，c，d のすべてが負の場合には　$0<x<\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$　となる．

a，b，c，d のうち 2 つが正で残り 2 つが負の場合には

$\boxed{\text{オカ}}<x<\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$　となる．さらに，a，b，c，d のすべてが正の場合には　$\boxed{\text{コサシ}}<x$　となる．

(3)　$\boxed{\text{オカ}}<x<\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ の範囲において，a，b，c，d の間には大小関係

$$\boxed{\text{ス}}<\boxed{\text{セ}}<\boxed{\text{ソ}}<\boxed{\text{タ}}$$

が成り立つ．

＜ Note ＞

3　x の関数 $\log_2(x^2+\sqrt{2})$ は $x=$ ア のとき，最小値 $\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$ をとる.

a を定数とするとき，x の方程式

$$\{\log_2(x^2+\sqrt{2})\}^2-2\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0 \quad \cdots\cdots①$$

が解をもつ条件は

$a \leqq$ エ

である.

$a=$ エ のとき方程式①は オ 個の解をもつ.

また，方程式①が 3 個の解をもつのは

$a=\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$

のときである.

< Note >

第３講　三角・指数・対数関数②

[1] $\dfrac{\pi}{8}<\theta<\dfrac{3}{8}\pi$ のとき

$$\tan 4\theta=\frac{1}{2}\tan\theta \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす θ について考えよう．

一般に，$\tan 2\theta$ を $\tan\theta$ を用いて表すと $\tan 2\theta=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\tan\theta}{\boxed{\text{イ}}-\tan^2\theta}$ である．さらに，

$\tan 4\theta$ を $\tan\theta$ を用いて表すと

$$\tan 4\theta=\frac{-\boxed{\text{ウ}}\tan^3\theta+\boxed{\text{エ}}\tan\theta}{\tan^4\theta-\boxed{\text{オ}}\tan^2\theta+\boxed{\text{カ}}} \quad \cdots\cdots ②$$

である．①，②から

$$\frac{\tan\theta(\tan^4\theta+\boxed{\text{キ}}\tan^2\theta-\boxed{\text{ク}})}{\tan^4\theta-\boxed{\text{オ}}\tan^2\theta+\boxed{\text{カ}}}=0 \quad \cdots\cdots ③$$

となる．

θ についての条件により $\tan\theta>0$ であるので，③から

$$\tan\theta=\sqrt{-\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}$$

を得る．この θ について，不等式 $\boxed{\text{シ}}$ が成り立つ．$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ $\dfrac{\pi}{8}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$　　① $\dfrac{\pi}{6}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$　　② $\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$　　③ $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{3}{8}\pi$

2　[1]　方程式

$$6^x-\frac{2^x}{27}-27\cdot3^x+1=0$$

を考える．$X=2^x$，$Y=3^x$ とおくと，この方程式の左辺は

$$(X-\boxed{\text{アイ}})\left(Y-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\right)$$

と因数分解される．したがって，この方程式の解 x は二つあり，そのうち小さい方の解は $\boxed{\text{カキ}}$ であり，大きい方の解の整数部分は $\boxed{\text{ク}}$ である．

[2]　不等式

$$\log_2 27-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+3\log_5\{27(x-1)\}<0 \quad \cdots\cdots①$$

を満たす x の値の範囲を求めよう．

$d=\log_{10}2$ とおくと

$$\log_2 27=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\log_{10}3$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=-\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\log_{10}(x-1)$$

$$\log_5\{27(x-1)\}=\frac{\boxed{\text{エ}}\log_{10}3+\log_{10}(x-1)}{\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}}$$

であるから，①を解くことは不等式

$$\boxed{\text{キ}}\log_{10}3+\log_{10}(x-1)<0$$

を解くことと同じである．これにより，求める x の値の範囲は

$$\boxed{\text{ク}}<x<\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である．

3　$u=\log_2(6-x)$，$v=\log_2(x-1)$ とおく．uv の最大値を求めよう．

真数は正であるから [ア] $<x<$ [イ] である．

[ア] $<x\leqq$ [ウ] または [エ] $\leqq x<$ [イ] のとき，$uv\leqq 0$ であり，

[ウ] $<x<$ [エ] のとき，$u>0$，$v>0$ である．

よって，uv の最大値は [ウ] $<x<$ [エ] の範囲で考えればよい．

このとき，相加平均と相乗平均の関係により

$$\sqrt{uv}\leqq\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{2}\log_2(\boxed{オ}x^2+\boxed{カ}x-\boxed{キ})\quad\cdots\cdots(*)$$

である．

x の 2 次関数 [オ] x^2+ [カ] $x-$ [キ] は $x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$

をとる．

[ウ] $<\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}<$ [エ] であり，$x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のとき，$(*)$の不等式において等号

が成り立つ．したがって，uv は $x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のときに最大値

$$(\log_2\boxed{ス}-\boxed{セ})^{\boxed{ソ}}$$

をとる．

< Note >

第4講　微分法・積分法①

【CHECK & UP】

1　［1］　3次関数 $f(x)=x^3-5x+1$ のグラフについて，次の問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ 上の点 $(2,\ -1)$ における接線 l の方程式，およびこの点において接線に垂直な直線 m を求めよ．

(2)　接線 l が接点以外で交わる点の x 座標を求めよ．

［2］　3次関数 $y=x^3-3x^2+1$ のグラフに点 $(0,\ 6)$ から引いた接線の方程式を求めよ．

2　［1］　$(3,\ 4)$ を通り，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に接する直線 l の方程式，および接点の x 座標を求めよ．

［2］　3次関数 $y=x^3-ax+2$ が直線 $y=2x$ に接するとき，定数 a の値を求めよ．

3　［1］　2つの放物線 $y=x^2+5$ と $y=-2x^2-1$ の共通接線の方程式を求めよ．

［2］　2曲線 $y=2x^3$，$y=3x^2+a$ が接するとき，定数 a の値を求めよ．

4　$f(x)=\dfrac{9}{8}x^3-9x^2+18x$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ．

5　x についての方程式 $2x^3-12x^2+18x+k=0$ の解の個数を求めよ．

＜ Note ＞

1　[1]　a を定数とし，放物線 $y=x^2+2ax-a^3-2a^2$ を C，その頂点を P とする．

(1)　頂点 P の座標は（ アイ ，$-a^{\boxed{ウ}}-$ エ a^2）

である．したがって，どのような定数 a についても，頂点 P は

$y=x^{\boxed{オ}}-\boxed{カ}\,x^2$

のグラフ上にある．

(2)　a が $-3\leqq a<1$ の範囲を動くとする．頂点 P の y 座標の値が最大となるのは

$a=\boxed{キ}$ と $a=\boxed{クケ}$

のときであり，最小となるのは

$a=\boxed{コサ}$

のときである．

[2]　関数 $f(x)=2x^3-3x^2+x$ は

$$x=\frac{1}{\boxed{ア}}-\frac{\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

で極大となる．また $f(x)$ は

$$f(x)=\left(\frac{1}{\boxed{エ}}x-\frac{1}{6}\right)\cdot f'(x)-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$$

と変形できるので，$f(x)$ の極大値は

$$\frac{\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カキ}}$$

である．

＜ Note ＞

[2] 曲線 $y=2x^3-3x$ を C とする．

(1) C 上の点 $(a,\ 2a^3-3a)$ における C の接線の方程式は

$$y=(\boxed{ア}a^{\boxed{イ}}-\boxed{ウ})x-\boxed{エ}a^{\boxed{オ}}$$

である．

(2) (1)で求めた接線が点 $(1,\ b)$ を通るのは

$$b=\boxed{カキ}a^{\boxed{ク}}+\boxed{ケ}a^{\boxed{コ}}-\boxed{サ}$$

が成り立つときである．

(3) したがって，点 $(1,\ b)$ から C へ相異なる３本の接線が引けるのは

$$\boxed{シス}<b<\boxed{セソ}$$

のときである．

＜ Note ＞

3 ［1］ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$ のグラフを C とする．

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における C の接線 l の方程式は

$$y=(t^2-\boxed{\text{ア}}\,t)x-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}t^3+t^2+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．接線 l と C の共有点の x 座標は，t および $\boxed{\text{カキ}}\,t+\boxed{\text{ク}}$ である．

したがって，C と l が1点だけを共有するのは，$t=\boxed{\text{ケ}}$ のときである．

［2］ 3次曲線

$C：y=f(x)=x^3-3x$

は直線

$l：y=px+q$

と点Aで接し，点Bで交わっているとする．

(1) 関数 $f(x)$ は $x=\boxed{\text{アイ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{ウ}}$，$x=\boxed{\text{エ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{オカ}}$ をとる．

(2) 点A，Bの x 座標をそれぞれ a，b（ただし $a<0<b$）とする．このとき p，q，b を，a を用いて表すと

$p=\boxed{\text{キ}}\,a^{\boxed{\text{ク}}}-\boxed{\text{ケ}}$

$q=-\boxed{\text{コ}}\,a^{\boxed{\text{サ}}}$

$b=\boxed{\text{シス}}\,a$

である．

< Note >

第4講　微分法・積分法①

1 Oを原点とする座標平面において，放物線 $y=2x-x^2$ を C とし，C の軸を l とする．C 上で x 座標が a である点をP，$2a$ である点をQとする．ただし，$a>0$ とし，Pは l 上にないとする．また，l に関してPと対称な点をRとする．

(1) Rの x 座標は $\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}$ であり，RとQが一致するような a の値は

$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

以下，$0<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ とする．

(2) 四角形OPQRの面積 S を a を用いて表すと

$S=\boxed{\text{オ}}(a^3-\boxed{\text{カ}}a^2+a)$

である．S は $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき最大値をとる．

2　k を正の実数とし，座標平面上に点 P(1, k) をとる．また，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-1$ を C とする．

点 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ における C の接線 l の方程式は $y=tx-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}t^2-1$ である．また，

点 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ を通り，接線 l に垂直な直線 m の方程式は

$$\boxed{\text{ウ}}\,x+\boxed{\text{エ}}\,ty=t^{\boxed{\text{オ}}}$$

である．直線 m が点 P を通るような t の値の個数を求めよう．

直線 m が点 P を通るとき，t は方程式

$$t^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\,kt-\boxed{\text{キ}}=0$$

を満たす．この方程式の左辺を $f(t)$ と表すとき，関数 $f(t)$ は

$t=-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}\,k}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき，極大値 $\dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}k\sqrt{k}-\boxed{\text{ス}}$

$t=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}\,k}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき，極小値 $-\dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}k\sqrt{k}-\boxed{\text{ス}}$

をとる．これより，直線 m が点 P を通るような t の値の個数について

$0<k<\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ のとき $\boxed{\text{タ}}$ 個，$\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}<k$ のとき $\boxed{\text{チ}}$ 個

であることがわかる．

3　3 次関数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+6$ を考える．

(1)　$f(x)$ は

$x=$ **アイ** のとき，極大値 **ウエ**

$x=$ **オ** のとき，極小値 **カキク**

をとる．

(2)　$y=f(x)$ のグラフを C とし，C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l とする．

$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$

$=(x-a)^2($ **ケ** $x+$ **コ** $a-$ **サ** $)$

であるから，C と l との共有点の x 座標は，

$x=a$，　$x=$ **シス** $a+\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$

であり，$a=\dfrac{\text{タ}}{\text{チ}}$ のときは，C と l とは接点以外に共有点をもたない．

＜ Note ＞

第５講　微分法・積分法②

【CHECK & UP】

1 ［1］ 3 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=x^2-6x+9$，$C_3: y=x^2-4x$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

［2］ 曲線 $C: y=-x^3+9x^2$，$D: y=-x^3+6x^2+7x$ および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

2 ［1］ 放物線 $C: y=2x^2-8x+7$ と直線 $l: y=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

［2］ 2 つの放物線 $C: y=x^2+12$ と $D: y=-x^2-10x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

［3］ 座標平面において放物線 $y=x^2$ を C とし，直線 $y=ax$ を l とする．ただし，$0<a<1$ とする．C と l で囲まれた図形の面積を S_1 とし，次に C と l と直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1+S_2 を a で表せ．

3 ［1］ 放物線 $C: y=-\frac{1}{2}x^2+x$ の $x=0$ における接線を l とする．C と l と $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

［2］ 2 つの放物線 $C_1: y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$，$C_2: y=-x^2-4x$ の交点の座標を求めよ．また，C_1，C_2 と $x=0$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

［3］ 放物線 $C: y=\frac{x^2}{6}$ の $x=6$ における接線を l とする．C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

［4］ 放物線 $C: y=x^2$ の $x=a$ $(-1<a<0)$ における接線を l とする．C と l，および $x=0$，$x=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

＜ Note ＞

1　方程式 $t^3-3t-2=0$ の解は $t=$ [アイ]，[ウ] である．

放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-1$ を C とする．C 上の点 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ を通り，C における接線に垂直な直線 m を考え，$t=$ [アイ]，[ウ] に対応する直線 m を，それぞれ m_1，m_2 とし，m_1 と m_2 の交点を P とする．点 P の座標は $\left(\text{[エ]},\ \dfrac{\text{[オ]}}{\text{[カ]}} \right)$ である．

m_1 と放物線 C の二つの交点のうち，x 座標が [アイ] と異なる点を Q とすると，Q の x 座標は [キ] である．

同様に，m_2 と C の二つの交点のうち，x 座標が [ウ] と異なる点を R とすると，R の x 座標は [クケ] である．

このとき，二つの線分 PQ，PR および C で囲まれた図形の面積は [コサ] である．

＜ Note ＞

2　[1]　a が $0<a<\frac{2}{3}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{A}\left(1+\frac{a}{2},\ 3a-\frac{5}{2}a^2\right)$ の軌跡は方程式

$$y=-10x^2+\boxed{アイ}x-\boxed{ウエ}$$

で表される放物線 D の $1<x<\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ の部分である．

放物線 $y=2x-x^2$ を C とし，C の軸を l とする．放物線 D の $1\leqq x\leqq\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ の部分と放物線 $y=2x-x^2$，l で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．

[2]　座標平面において，点 $(a,\ 1)$ を中心とし，x 軸に接する円を C_1 とする．また，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ を C_2 とし，C_2 上に点 $\mathrm{P}\left(b,\ \frac{1}{2}b^2\right)$ をとる．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

(1)　C_1 の方程式は $(x-\boxed{ア})^2+(y-\boxed{イ})^2=\boxed{ウ}$ である．

(2)　P における C_2 の接線 l の傾きは $\boxed{エ}$ である．したがって，l の方程式は

$$y=\boxed{エ}x-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}b^{\boxed{キ}}$$

である．また，P を通り，l に直交する直線 m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}x+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}b^{\boxed{ス}}+\boxed{セ}$$ である．

(3)　C_1 の中心が m 上にあるとする．このとき　$a=\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}b^{\boxed{チ}}$ が成り立つ．

さらに，C_1 が P を通るとき　$b=\sqrt{\boxed{ツ}}$，$a=\frac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}}{2}$　である．

このとき，C_1 は P において l に接し，l と x 軸のなす角は $\boxed{ナニ}^\circ$ である．

また，2 直線 $x=0$，$x=a$ の間にあって，C_1 と C_2 と x 軸の三つで囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}-\frac{\pi}{\boxed{ハ}}$$ である．

＜ Note ＞

3 a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の2次関数のグラフとする．

C_1：$y=x^2$

C_2：$y=x^2-4ax+4a(a+1)$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする．

(1) 点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は

$y=$ ア $tx-t^{イ}$

であり，この直線が C_2 に接するのは $t=$ ウ のときである．

したがって，直線 l の方程式は

$y=$ エ $x-$ オ

であり，l と C_2 の接点の座標は

(カキ ＋ ク ， ケコ ＋ サ)

である．

(2) C_1 と C_2 の交点をPとすると，Pの座標は

$(a+$ シ ，$(a+$ シ $)^2)$

である．点Pを通って直線 l に平行な直線を m とする．直線 m の方程式は

$y=$ ス $x+a^{セ}-$ ソ

である．直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は

$a>$ タ である．

$a>$ タ のとき，C_1 の $x\geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$S=\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}(\text{テ}+1)^{\text{ト}}(\text{ナニ}-1)$

と表される．

＜ Note ＞

第５講　微分法・積分法②

1　O を原点とする座標平面において，2 点 A(1, 0)，B(−1, 0) をとる．次の二つの曲線 C_1，C_2 を考える．

$C_1：y=mx^2+nx$　　　　$C_2：y=px^3+qx^2+rx$

ここで C_1 は 2 点 O，A を通り，C_1 の O における接線の傾きは 1 である．また，C_2 は 3 点 O，A，B を通り，C_2 の O における接線の傾きは $a(a>0)$ である．

(1)　このとき，$m=$ [アイ]，$n=$ [ウ] であり，$p=$ [エオ]，$q=$ [カ]，$r=$ [キ] である．

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x=0$, [ク], $\dfrac{[ケ]}{[コ]}-$[サ] である．したがって，C_1 と C_2 が $0<x<1$ において交わるような a の値の範囲は

$$\frac{[シ]}{[ス]}<a<[セ]$$

である．

(3)　a は $0<a<1$ を満たすとする．C_1 の A における接線を l_1 とすると，l_1 の方程式は

$$y=[ソ]x+[タ]$$

である．C_2 の O における接線を l_2 とする．x 軸と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積は

$$\frac{[チ]}{[ツ]([テ]+1)}$$

である．また，x 軸と C_1 で囲まれた部分の面積は

$$\frac{[ト]}{[ナ]}$$

である．

l_2 と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1 とし，また，l_1，l_2 および C_1 の三つで囲まれた部分の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ となるのは

$$a=\frac{[ニ]}{[ヌ]}$$

のときである．

2 座標平面上で三つの曲線

$C_1: y=-x^2-4x$

$C_2: y=-x^2+2x$

$C_3: y=k(-x^2+ax+b)$

を考える．ただし，a，b，k は定数で，$k>0$ とする．

(1) C_1 と C_2 の交点 P の座標は ([ア] , [イ]) である．

(2) 点 Q$(-4, 0)$ における C_1 の接線の方程式は

$y=$ [ウ] $x+$ [エオ]

であり，点 R$(2, 0)$ における C_2 の接線の方程式は

$y=$ [カキ] $x+$ [ク]

である．

(3) C_3 が 2 点 Q，R を通るとする．このとき

$a=$ [ケコ] ，$b=$ [サ]

である．さらに点 Q における C_1 の接線と C_3 の接線が一致するのは

$k=\dfrac{[シ]}{[ス]}$

のときである．このとき，第 2 象限において，曲線 C_1，C_3 および y 軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{[セソ]}{[タ]}$ である．

3 $a>0$ として

$$f(x)=-x^2+2ax$$

$$g(x)=2x^2$$

とおく．

(1) 関数 $F(x)$ を

$$F(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

で定義すると

$$F(x)=-x^{\boxed{ア}}+\boxed{イ}x^{\boxed{ウ}}$$

である．二つの放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}a^{\boxed{キ}}$$

と表される．

(2) $$T(a)=\int_0^2 |f(x)-g(x)|dx$$

とおき，$T(a)$ を a の関数と考える．$T(a)$ は

$0<a<\boxed{ク}$ のとき　$T(a)=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}a^{\boxed{シ}}-\boxed{ス}a+\boxed{セ}$

$a\geqq\boxed{ク}$ のとき　$T(a)=\boxed{ソ}a-\boxed{タ}$

と表される．したがって，$a>0$ の範囲において，$T(a)$ は

$$a=\frac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$$

のとき，最小値

$$\boxed{ト}-\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}$$

をとる．

< Note >

第６講　微分法・積分法③　※第６講には【CHECK & UP】はありません.

1　座標平面上で，放物線 $y=x^2$ を C とする.

曲線 C 上の点Pの x 座標を a とする．点Pにおける C の接線 l の方程式は

$$y=\boxed{\text{アイ}}\,x-a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．$a\neq 0$ のとき直線 l が x 軸と交わる点をQとすると，Qの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である.

$a>0$ のとき，曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である.

$a<2$ のとき，曲線 C と直線 l および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T=-\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{サ}}\,a^2-\boxed{\text{シ}}\,a+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である.

$a=0$ のときは $S=0$，$a=2$ のときは $T=0$ であるとして，$0\leqq a\leqq 2$ に対して $U=S+T$ とおく．a がこの範囲を動くとき，U は $a=\boxed{\text{ソ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとり，

$a=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ をとる.

＜ Note ＞

2　a を正の実数とし，x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=\frac{1}{8}x^2$，$g(x)=-x^2+3ax-2a^2$ とする．また，放物線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．

(1)　C_1 と C_2 の共有点を P とすると，点 P の座標は $\left(\frac{\text{ア}}{\text{イ}}a,\ \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}a^2\right)$ である．また，点 P における C_1 の接線の方程式は

$$y=\frac{\text{オ}}{\text{カ}}ax-\frac{\text{キ}}{\text{ク}}a^2$$

である．

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ である．また，C_2 と x 軸の交点の x 座標は サ，シス であり，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}a^3$ である．

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，二つの放物線 C_1，C_2 と 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた図形を R とする．R の中で，$y\geqq 0$ を満たすすべての部分の面積 $S(a)$ は

$0<a\leqq$ タ のとき　$S(a)=-\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}a^3+\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$

タ $<a\leqq$ チ のとき　$S(a)=-\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}a^3+$ ト a^2- ナ $a+$ ニ

チ $<a$ のとき　$S(a)=\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$

である．したがって，a が $a>0$ の範囲を動くとき，$S(a)$ は $a=\frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$ で最小値 $\frac{\text{ノ}}{\text{ハヒ}}$ をとる．

＜ Note ＞

3 放物線 $y=2x^2$ を C，点 $(1,\ -2)$ を A とする．

点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$u=\frac{x+\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad v=\frac{y-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ．Q が C 上を動くときの点 P の軌跡を D とすると，D は放物線

$$y=x^2+\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}$$

である．

2 つの放物線 C と D の交点を R と S とする．ただし，x 座標の小さい方を R とする．

点 R, S の x 座標はそれぞれ $\boxed{\text{キク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ で，点 R, S における放物線 D の接線の方程式はそれぞれ

$$y=\boxed{\text{コ}},\quad y=\boxed{\text{サ}}x-\boxed{\text{シ}}$$

である．

P を放物線 D 上の点とし，P の x 座標を a とおく．P から x 軸に引いた垂線と放物線 C との交点を H とする．$\boxed{\text{キク}}<a<\boxed{\text{ケ}}$ のとき，三角形 PHR の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}a^3+a^2+\boxed{\text{ソ}}a+\boxed{\text{タ}}\right)$$

と表される．$S(a)$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき，最大値をとる．

$a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき，直線 HR と放物線 D の交点のうち，R と異なる点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．このとき，$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ の範囲で，放物線 D と直線 PH および直線 HR で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ナニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である．

< Note >

第6講　微分法・積分法③

1　$a>0$ とし，直線 $y=2ax$ を l とする．

(1)　点 $(-1,\ 0)$ で x 軸に接する放物線 C_1 が直線 l にも接しているとする．その接点 P の座標は (ア ， イウ) であり，C_1 の方程式は

$$y=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}(x+1)^2$$ である．

次に，x 軸に接する放物線 C_2 : $y=p(x-q)^2$ が点 P を通り，点 P での接線が直線 l と直交しているとする．このとき，点 P での C_2 の接線の傾きは $\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケ}}$ であり，

p と q は

$$p=\frac{1}{\boxed{コサ}\,a^{\boxed{シ}}},\quad q=\boxed{ス}+\boxed{セ}\,a^{\boxed{ソ}}$$

である．

(2)　放物線 C_1，x 軸，直線 $x=\boxed{ア}$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，また放物線 C_2，x 軸，直線 $x=\boxed{ア}$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1，S_2 は a を用いてそれぞれ

$$S_1=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}a,\quad S_2=\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}a^{\boxed{ナ}}$$

と表される．

したがって，$3S_1=S_2$ となるのは $a=\frac{\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$ のときである．

2 $x \geqq 0$ の範囲における関数 $y=x^2$ のグラフを C_1，$x \leqq 0$ の範囲における関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを C_2 とする．実数 a は $0<a \leqq 1$ の範囲にあるとし，C_1 上の点Pの x 座標は a，C_2 上の点Qの x 座標は $-a$ であるとする．

点Pで C_1 に接する直線 l_1 の方程式は

$$y=\boxed{\text{アイ}}\,x-a^2$$

であり，点Qで C_2 に接する直線 l_2 の方程式は

$$y=\boxed{\text{ウエ}}\,x-\frac{a^2}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．直線 l_1 と直線 l_2 の交点をRとすると，Rの x 座標は $\frac{a}{\boxed{\text{カ}}}$ である．点Rは，a の値によらずに放物線 $y=\boxed{\text{キクケ}}\,x^2$ の上にある．

また，l_1，l_2 および y 軸で囲まれた三角形の面積は $\frac{a^3}{\boxed{\text{コサ}}}$ である．

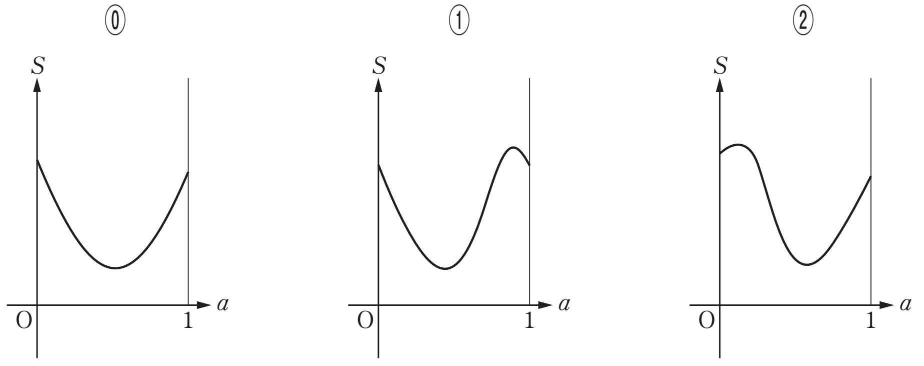
直線 $x=1$ と l_1 の交点をG，直線 $x=-1$ と l_2 の交点をHとおき，2曲線 C_1，C_2 と2線分RG, RHおよび2直線 $x=1, x=-1$ によって囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．このとき

$$S(a)=-\frac{1}{\boxed{\text{コサ}}}a^3+\frac{\boxed{\text{シ}}}{2}a^2-\frac{\boxed{\text{ス}}}{2}a+\frac{\boxed{\text{セ}}}{2}$$

である．$0<a \leqq 1$ の範囲において，$S(a)$ は

$$a=\boxed{\text{ソタ}}-2\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}$$

のときに極小値をとり，関数 $S=S(a)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{テ}}$ である．$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．



3 k を実数とし，$P(x)=x^3-(k+20)x-2k$ とする．

(1) 3次方程式 $P(x)=0$ がただ一つの実数解 α をもつとき，k と α の取り得る値の範囲を求めよう．

座標平面上で，曲線 $y=x^3-20x$ を C，直線 $y=k(x+2)$ を l とする．はじめに，直線 l が C と接するような k の値を求める．直線 l は k の値によらずに定点 A(アイ , ウ) を通る．一方，C 上の点 $(t,\ t^3-20t)$ における曲線 C の接線の方程式は

$y=($ エ t^2- オカ $)x-$ キ t^3

である．この接線が A を通るとすると $t=$ ク である．したがって，A から曲線 C に引いた接線の方程式は

$y=$ ケコ $x-$ サシ

であり，このときの k の値は ケコ である．また，この接線と C との共有点の x 座標は

$x=$ スセ , ソ

である．

方程式 $P(x)=0$ の実数解は曲線 C と直線 l との共有点の x 座標である．したがって，この方程式がただ一つの実数解をもつときの k の取り得る値の範囲は

$k<$ タチ

であり，その実数解 α の取り得る値の範囲は

ツテ $<\alpha<$ トナ

である．

(2) 2曲線 $y=P(x)$，$y=x^3-kx^2-20x$ と2直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積が1となるとき

$k=\pm\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$

である．

＜ Note ＞

第7講　数列①

【CHECK & UP】

1　[1]　初項が a_1 で，公差 d が整数である等差数列 $\{a_n\}$ が二つの条件

(A)　$a_3+a_5+a_7=93$

(B)　$a_n>100$ となる最小の n は 15 である．

を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　この数列の初項と公差を求めよ．

(2)　$\sum_{i=1}^{n} a_i>715$ となる最小の自然数 n を求めよ．

[2]　$b_n=pn+q$ で表される数列 $\{b_n\}$ に対して，初項から第 n 項までの和を S_n とする．$b_7=1$，$S_{12}=10$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　p，q の値を求めよ

(2)　S_n を求めよ．

(3)　$\sum_{k=1}^{12} S_k$ を求めよ．

2　[1]　等比数列 $\{a_n\}$：18，$-6\sqrt{3}$，6，…… について次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ の一般項を n の式で表し，第 6 項を求めよ．

(2)　$\{a_n\}$ の第 3 項から第 13 項までの奇数番目の項の和を求めよ．

[2]　初項が 0 でない等比数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2=0$，$a_1+a_2+a_3=\frac{9}{4}$ を満たしている．

このとき次の問いに答えよ．

(1)　$a_4+a_5+a_6$ の値を求めよ．

(2)　$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}=57$ となる n を求めよ．

3　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表されるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(1)　$S_n=2n^2+5n$

(2)　$S_n=3^n+1$

< Note >

1 a，b，c を相異なる実数とする．数列 $\{x_n\}$ は等差数列で，最初の 3 項が順に a，b，c であるとし，数列 $\{y_n\}$ は等比数列で，最初の 3 項が順に c，a，b であるとする．

(1) b と c は a を用いて

$$b=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a,\ c=\boxed{\text{エオ}}\,a$$

と表され，等差数列 $\{x_n\}$ の公差は $\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}a$ である．

(2) 等比数列 $\{y_n\}$ の公比は $\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，$\{y_n\}$ の初項から第 8 項までの和は，a を用いて

$$\frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シス}}}a$$

と表される．

(3) 数列 $\{z_n\}$ は最初の 3 項が順に b，c，a であり，その階差数列 $\{w_n\}$ が等差数列であるとする．このとき，$\{w_n\}$ の公差は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a$ であり，$\{w_n\}$ の一般項は

$$w_n=\frac{\boxed{\text{タ}}\,n-\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a$$

である．したがって，数列 $\{z_n\}$ の一般項は，a を用いて

$$z_n=\frac{a}{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナ}}\,n^2-\boxed{\text{ニヌ}}\,n+\boxed{\text{ネノ}}\right)$$

と表される．

＜ Note ＞

2　三つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ がある．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は，初項が -27 で，漸化式

$$a_{n+1}=3a_n+60 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．このとき

$$a_n=\boxed{\text{ア}}^n-\boxed{\text{イウ}}$$

である．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}^n-\boxed{\text{キ}}\right)-\boxed{\text{イウ}}\,n$$

である．また，$S_n>0$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(2)　第 n 項が $2b_n+c_n$ で与えられる数列 $\{2b_n+c_n\}$ は，初項が 0 で公差が d の等差数列になり，第 n 項が b_n-2c_n で与えられる数列 $\{b_n-2c_n\}$ は，初項が x で公比が r の等比数列になるとする．このとき b_n+c_n は

$$b_n+c_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d(n-1)-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x\,r^{n-1}$$

と表される．

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ は(1)，(2)を満たすとする．さらに，第 n 項が b_n+c_n で与えられる数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列は，数列 $\{a_n\}$ であるとする．このとき

$$a_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x(1-r)r^{n-1}$$

であるから，(1)より

$$r=\boxed{\text{ス}},\quad x=\frac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad d=\boxed{\text{ツテト}}$$

である．したがって，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の第 n 項は，それぞれ

$$b_n=-\frac{\boxed{\text{ナ}}^n}{\boxed{\text{ニ}}}-\boxed{\text{ヌネ}}(n-1)$$

$$c_n=\boxed{\text{ノ}}^n-\boxed{\text{ハヒ}}(n-1)$$

である．

＜ Note ＞

3

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ が

$S_n=-n^2+24n$　($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)

で与えられるものとする．このとき $a_1=$ アイ，$a_2=$ ウエ である．また $a_n<0$ となる自然数 n の値の範囲は $n\geqq$ オカ であり，

$\sum_{k=1}^{40}|a_k|=$ キクケ

となる．

(2)　初項 1，公比 3 の等比数列を $\{b_k\}$ とおく．各自然数 n に対して，$b_k\leqq n$ を満たす最大の b_k を c_n とおく．たとえば，$n=5$ のとき

$b_2=3$，$b_3=9$　であり　$b_1<b_2\leqq5<b_3<b_4<\cdots$

なので　$c_5=b_2=3$　である．

(i)　$c_{10}=$ コ であり，$c_n=27$ である自然数 n は全部で サシ 個ある．

(ii)　$\sum_{k=1}^{30}c_k=$ スセソ である．

＜ Note ＞

第7講　数列①

1　(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項が7，公差が -4 の等差数列とする．数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{アイ}}\,n+\boxed{\text{ウエ}}$$

であり，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\boxed{\text{オカ}}\,n^2+\boxed{\text{キ}}\,n$$

である．

(2)　数列 $\{b_n\}$ は，第 n 項が

$$b_n=pn^2-qn-r$$

という n の2次式で表され

$$b_{n+1}-2b_n=\boxed{\text{オカ}}\,n^2+\boxed{\text{キ}}\,n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots\cdots①$$

を満たすとする．このとき，

$$p=\boxed{\text{ク}},\quad q=\boxed{\text{ケ}},\quad r=\boxed{\text{コ}}$$

であり，$b_1=\boxed{\text{サシ}}$ である．

さらに，次の条件によって定まる数列 $\{c_n\}$ を考えよう．

$$c_1=1$$

$$c_{n+1}-2c_n=\boxed{\text{オカ}}\,n^2+\boxed{\text{キ}}\,n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots\cdots②$$

①と②より，$d_n=c_n-b_n$ とおくと

$$d_{n+1}-\boxed{\text{ス}}\,d_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ．これより，数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n=\boxed{\text{セ}}\cdot\boxed{\text{ソ}}^{\,n-1}+\boxed{\text{ク}}\,n^2-\boxed{\text{ケ}}\,n-\boxed{\text{コ}}$$

である．

数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$ は

$$\boxed{\text{タ}}\cdot\boxed{\text{チ}}^{\,n}+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}n^3-\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}n^2-\frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}n-\boxed{\text{ノ}}$$

となる．

2 (1) 整数からなる等比数列 $\{a_n\}$ が，$a_1+a_2=32$，$a_4+a_5=864$ を満たしている．このとき，

$$a_n=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}^{n-1}$$

であり，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+4k-2)=\boxed{\text{ウ}}\cdot\boxed{\text{エ}}^{n}+\boxed{\text{オ}}n^2-\boxed{\text{カ}}$$

となる．

(2) 分数 $\dfrac{9}{37}$ を小数で表したときに小数第 n 位に現れる数を b_n とする．すべての自然数 n に対して $b_{n+p}=b_n$ となる最小の自然数 p は $\boxed{\text{キ}}$ であり，

$$\sum_{k=1}^{100}b_k=\boxed{\text{クケコ}}$$

である．

3　数列 $\{a_n\}$ を $a_n=2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める.

(1)　a_n を 10 で割った商を b_n とし，余りを c_n として，数列 $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ を定める．このとき

$a_n=10b_n+c_n$　(b_n と c_n は整数で，$0 \leqq c_n < 10$)　である.

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$，$T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$，$U_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$ とおく.

S_n を求めると　$S_n=\boxed{\text{ア}}^{n+\boxed{\text{イ}}}-\boxed{\text{ウ}}$　である.

数列 $\{c_n\}$ の初めの 5 項は $c_1=\boxed{\text{エ}}$，$c_2=\boxed{\text{オ}}$，$c_3=\boxed{\text{カ}}$，$c_4=\boxed{\text{キ}}$，$c_5=\boxed{\text{ク}}$ である.

自然数 p で，すべての n に対して $c_{n+p}=c_n$ となるものがあり，その最小のものは $p=\boxed{\text{ケ}}$ である．以下では $p=\boxed{\text{ケ}}$ とし，自然数 n を $n=pl+m$ (l と m は整数で，$0 \leqq m < p$) と表す．このとき

$U_n-\boxed{\text{コサ}}\,l$

は m だけで定まり，これを d_m とおけば $d_0=\boxed{\text{シ}}$，$d_1=\boxed{\text{ス}}$，$d_{p-1}=\boxed{\text{セソ}}$ である.

$S_n=\boxed{\text{タチ}}\,T_n+U_n$　であるから

$$T_n=\frac{\boxed{\text{ツ}}^{n}-\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}-\boxed{\text{ナ}}\,l-\frac{d_m}{\boxed{\text{ニヌ}}}$$　と表される.

(2)　a_n を 11 で割った余りを e_n $(0 \leqq e_n < 11)$ として，数列 $\{e_n\}$ を定め $V_n=\sum_{k=1}^{n} e_k$ とおく.

自然数 q で，すべての n に対して $e_{n+q}=e_n$ となるものがあり，その最小のものは $q=\boxed{\text{ネノ}}$ である．$q=\boxed{\text{ネノ}}$ とし，自然数 n を $n=ql+m$ (l と m は整数で，$0 \leqq m < q$) と表すとき

$V_n-\boxed{\text{ハヒ}}\,l$

は m だけで定まる.

＜ Note ＞

第８講　数列②

【CHECK & UP】

1　正の整数 a を初項とし，1 より大きい整数 r を公比とする等比数列 $\{a_n\}$ が $a_4=54$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ．

(2)　$S_n=\sum_{k=1}^{n} ka_k$ とするとき，S_n を求めよ．

2　数列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，…… の第 n 項を a_n とする．この数列を第 k 群に k 個の項を含むように分ける．このとき次の問いに答えよ．

(1)　第 20 群の初項は数列 $\{a_n\}$ の何番目の項か．

(2)　$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{205}$ を求めよ．

3　[1]　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}+a_n=0$

(3)　$a_1=4$，$a_{n+1}=-3a_n+8$

[2]　$a_{n+1}=a_n+(2n+3)$，$a_1=3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_n の一般項を求めよ．

(2)　$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$ を求めよ．

[3]　$c_1=2$，$c_{n+1}=-c_n+n^2+3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　で表される数列 $\{c_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　c_{n+2} を c_n と n を用いて表せ．

(2)　$c_{25}-c_{23}$ を求めよ．また c_{25} を求めよ．

＜ Note ＞

1　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=3,\ a_{n+1}=-2a_n+8\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n=\frac{(\boxed{\text{アイ}})^{n-1}+\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．したがって，自然数 n に対し $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおけば

$$S_n=\frac{-(\boxed{\text{オカ}})^{n}+\boxed{\text{キク}}\,n+\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である．

(2)　自然数 n に対し $T_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ とおく．

$a_n=0$ となるのは $n=\boxed{\text{サ}}$ のときであり，このとき $T_{\boxed{\text{サ}}}=\boxed{\text{シ}}$ である．

また，$n>\boxed{\text{サ}}$ のとき

$$|a_n|=\frac{\boxed{\text{ス}}^{\,n-1}+\boxed{\text{ウ}}\cdot(\boxed{\text{セソ}})^{n-1}}{\boxed{\text{エ}}}$$

と表すことができる．これより，$n>\boxed{\text{サ}}$ かつ n が奇数ならば

$$T_n=\frac{\boxed{\text{タ}}^{\,n}+\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

であり，$n>\boxed{\text{サ}}$ かつ n が偶数ならば

$$T_n=\frac{\boxed{\text{ト}}^{\,n}+\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である．

＜ Note ＞

2 $\{a_n\}$ を初項 a_1 が1で公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列とする．数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り出して，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{2n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．$T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおく．

(1)　$\{b_n\}$ も等比数列であり，その初項は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，公比は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．したがって

$$T_n=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\left(1-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}^{\,n}}\right)$$

である．また，積 $b_1b_2\cdots b_n$ を求めると

$$b_1b_2\cdots b_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}^{\,n^2}}$$

となる．

(2)　次に，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=2n\cdot b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定め，$U_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$ とおく．

$$\boxed{\text{サ}}\,c_{n+1}-c_n=\boxed{\text{シ}}\,b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}(\boxed{\text{サ}}\,c_{k+1}-c_k)=\boxed{\text{シ}}\,T_n \quad \cdots\cdots①$$

である．また，この左辺の和をまとめ直すと，U_n，c_{n+1}，c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^{n}(\boxed{\text{サ}}\,c_{k+1}-c_k)=\boxed{\text{ス}}\,U_n+\boxed{\text{セ}}\,c_{n+1}-\boxed{\text{ソ}}\,c_1 \quad \cdots\cdots②$$

と表される．

①と②より

$$U_n=\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}-\frac{\boxed{\text{トナ}}\,n+\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}\cdot\frac{1}{\boxed{\text{ネ}}^{\,n}}$$

となる．

＜ Note ＞

3　$\{a_n\}$ を $a_2=-\dfrac{7}{3}$，$a_5=-\dfrac{25}{3}$ である等差数列とし，自然数 n に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく．

$a_1=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ であり，$\{a_n\}$ の公差は $\boxed{エオ}$ である．したがって

$$a_n=\boxed{カキ}\,n+\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$S_n=\boxed{コ}\,n^2+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\,n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

次に，数列 $\{b_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

を満たすとする．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう．(I)から，$b_1=\boxed{ス}$ である．さらに，$\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$ に注意して，(I)を利用すると

$$b_{n+1}=\boxed{セ}\,b_n+\boxed{ソ}\,n+\boxed{タ}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立ち，この等式は

$$b_{n+1}+\boxed{チ}(n+1)+\boxed{ツ}$$
$$=\boxed{セ}\left(b_n+\boxed{チ}\,n+\boxed{ツ}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できる．ここで

$$c_n=b_n+\boxed{チ}\,n+\boxed{ツ}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

とおくと，$\{c_n\}$ は，$c_1=\boxed{テ}$，公比が $\boxed{ト}$ の等比数列であるから，(II)により

$$b_n=\boxed{ナ}^{\boxed{ニ}}-\boxed{ヌ}\,n-\boxed{ネ}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．ただし，$\boxed{ニ}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

< Note >

第８講　数列②

1　$\{a_n\}$ を初項 a，公差 d の等差数列とし，$\{b_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．ただし，$a\neq0$，$r\neq1$ とする．

(1)　$a_5=b_2$ とすると

$$d=\frac{a(r-\boxed{\text{ア}})}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．さらに，$a_{17}=b_3$ とすると

$$r=\boxed{\text{ウ}},\quad d=\frac{a}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる．このとき，$a_m=b_n$ となる m は n を用いて

$$m=\boxed{\text{オ}}\cdot\boxed{\text{カ}}^{n-1}-\boxed{\text{キ}}$$

と表される．

(2)　$c_n=\boxed{\text{オ}}\cdot\boxed{\text{カ}}^{n-1}-\boxed{\text{キ}}$ とおく．このとき，数列 $\{c_n\}$ は漸化式

$$c_{n+1}=\boxed{\text{ク}}\,c_n+\boxed{\text{ケ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．p を実数とし，$p\neq0$ とする．数列 $\{d_n\}$ を

$$d_n=pc_n{}^2+\boxed{\text{ク}}\,c_n+\boxed{\text{ケ}}$$

により定めるとき，$\{d_n\}$ の階差数列が等比数列であるとする．このとき

$$p=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である．また，数列 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}^{n}-\boxed{\text{ソ}}\right)+\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}n$$

である．

2 自然数の列 1, 2, 3, 4, …… を，次のように群に分ける．

1	2, 3, 4, 5	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	……
第 1 群	第 2 群	第 3 群	

ここで，一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする．第 n 群の最後の項を a_n で表す．

(1) $a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=$ **アイ** である．

$$a_n-a_{n-1}=\boxed{ウ}\,n-\boxed{エ}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

が成り立ち

$$a_n=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}n^{\boxed{キ}}-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

よって，600 は，第 **コサ** 群の小さい方から **シス** 番目の項である．

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項を b_n で表すと

$$b_n=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}n^{\boxed{タ}}+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}n$$

であり

$$\frac{1}{b_n}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{ナ}}\right)$$

が成り立つ．これより

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{ニ}\,n}{\boxed{ヌ}\,n+\boxed{ネ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．

3　数列 $\{a_n\}$ は，漸化式

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_n+a_{n+1}=\frac{1}{n(n+2)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$S_3=a_1+(a_2+a_3)=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

$$S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

である．自然数 m に対して，$S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})$ と表されるので

$$S_{2m}=\frac{1}{\boxed{オ}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-\boxed{カ}}-\frac{1}{2k+\boxed{キ}}\right)=\frac{m}{\boxed{ク}m+\boxed{ケ}}$$

であり，同様に，$S_{2m+1}=a_1+\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}+a_{2k+1})$ と表されるので

$$S_{2m+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\boxed{コ}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\boxed{サ}}\right)=\frac{\boxed{シ}m+2}{\boxed{ス}(m+\boxed{セ})}$$

である．

したがって，自然数 m に対して

$$a_{2m}=\frac{\boxed{ソタ}m^{\boxed{チ}}-m+\boxed{ツ}}{\boxed{テ}m(\boxed{ク}m+\boxed{ケ})}$$

$$a_{2m+1}=\frac{2m^{\boxed{チ}}+3m+2}{\boxed{テ}(m+\boxed{セ})(\boxed{ク}m+\boxed{ケ})}$$

である．以上のことから，2 以上の自然数 n に対して

$$a_n=\frac{1}{\boxed{ト}n(n+\boxed{ナ})}+\frac{(-\boxed{ニ})^{n+1}}{\boxed{ヌ}}\quad\cdots\cdots(*)$$

である．$a_1=\frac{1}{2}$ であるから，$(*)$ は $n=1$ のときにも成り立つので，$(*)$ はすべての自然数 n に対して成り立つ．

＜ Note ＞

第９講　ベクトル①

【CHECK & UP】

1　各辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，線分ABの中点をP，線分OBを2：1に内分する点をQ，線分OCを1：3に内分する点をRとする．また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\angle QPR=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

2　平面上の3点O，A，Bが $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|=1$ を満たしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ および $|\overrightarrow{OB}|$ の値を求めよ．

(2)　△OABの面積を求めよ．

(3)　Oから辺ABに下ろした垂線と辺ABとの交点をHとする．$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．また $|\overrightarrow{OH}|$ の値を求めよ．

3　△ABCにおいて辺ABを1：3に内分する点をD，辺ACを1：2に内分する点をEとする．直線DEと直線BCの交点をFとするするとき，BC：CFを求めたい．

(1)　$\overrightarrow{DF}=t\overrightarrow{DE}$ とするとき，$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，t を用いて表せ．

(2)　以下誘導①，誘導②，誘導③に従ってBC：CFを求めよ．

誘導①　$\overrightarrow{BF}=s\overrightarrow{BC}$ とするとき，$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，s を用いて表せ．
また，(1)と比較することにより，s，t の値とBC：CFを求めよ．

誘導②　点Fは直線BC上にある．よって $\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ の形で表したとき，α と β にはある関係が成り立つ．その関係式を求めよ．またそのことと(1)を利用し，t の値とBC：CFを求めよ．

誘導③　メネラウスの定理を用いて $\dfrac{BF}{FC}$ の値を求め，t の値とBC：CFを求めよ．

4　△ABCにおいて，辺BCを1：4に内分する点をDとする．また，$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AD}$ となる点Eをとる．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{BE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，k を用いて表せ．

(2)　直線BEと直線ACが平行になるとき，k の値を求めよ．

＜ Note ＞

1 三角形 ABC の 3 辺の長さがそれぞれ AB=3，BC=a，CA=6 であるとする．点 P は

$$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+6\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

を満たすとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{y}$ とおく．

(1) 直線 AP と直線 BC の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ を用いて表すと，それぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\vec{x}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{x}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{y}$$

となる．（$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ は解答の順序を問わない．）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよう．(1)より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\boxed{\text{ク}}+\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{x}\cdot\vec{y}$　である．

また，余弦定理を用いると　$\vec{x}\cdot\vec{y}=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}-a^2}{\boxed{\text{サ}}}$　であるから，求める内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\frac{\boxed{\text{シス}}-a^2}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

(3) AD=2 のとき，$a=\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である．このとき，点 P から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ で表そう．

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{x}=\boxed{\text{チ}}$ であるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{x}$ と表したとき

$$t=\frac{\boxed{\text{ツ}}-\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}-\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\vec{x}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}-\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\vec{y}$$

である．

< Note >

2　平面上に一辺の長さが1である正三角形OPQがある．直線OQに関してPと対称な点をRとし，直線OPに関してQと対称な点をSとする．PSを$a:(1-a)$ $(0<a<1)$に内分する点をA，ORを$b:(1-b)$ $(0<b<1)$に内分する点をBとする．ベクトル$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$をそれぞれ$\vec{p}$，$\vec{q}$とおく．

(1)　$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を$\vec{p}$，$\vec{q}$で表すと

$$\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\boxed{\text{ア}}\vec{q},\quad \overrightarrow{OB}=-\boxed{\text{イ}}\vec{p}+\boxed{\text{ウ}}\vec{q}$$

であるから，$\overrightarrow{AR}$と$\overrightarrow{BQ}$は

$$\overrightarrow{AR}=-\boxed{\text{エ}}\vec{p}+(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}})\vec{q}$$

$$\overrightarrow{BQ}=\boxed{\text{キ}}\vec{p}+(\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}})\vec{q}$$

となる．ただし，$\boxed{\text{オ}}$と$\boxed{\text{カ}}$は解答の順序を問わない．これより

$$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}(\boxed{\text{サ}}a-\boxed{\text{シ}}b-ab)$$

である．

(2)　2直線ARとBQが垂直に交わるとする．このとき，bはaを用いて

$$b=\frac{\boxed{\text{ス}}a}{a+\boxed{\text{セ}}}$$

と表される．さらに$a=\frac{1}{2}$とすると

$$|\overrightarrow{AR}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad |\overrightarrow{BQ}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

であり，四角形ABRQの面積は

$$\frac{\boxed{\text{ナニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

である．また，2直線ARとBQの交点をCとすると

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\boxed{\text{ハヒ}}}(-\boxed{\text{フ}}\vec{p}+\boxed{\text{ヘホ}}\vec{q})$$

である．

< Note >

3 四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ である．
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=$ **ア** であり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である．

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=$ **カ** である．

(2) 直線AB上の点Pを $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$ であるようにとると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{a}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{b}-\vec{c}$$

となり，点Pは線分ABを $1:\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ に内分する．また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=$ **ス** であり，

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タ}}$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は三角形 **チ** の各辺と垂直であるから，直線CPは三角形 **チ** を含む平面に垂直である．ただし，**チ** については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ ABC　　① OBC　　② OAC　　③ OAB

三角形 **チ** の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}$ であるから，四面体OABCの体積は $\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}$ である．

＜ Note ＞

第9講　ベクトル①

1　a を正の実数とする．三角形 ABC の内部の点 P が

$$5\overrightarrow{\mathrm{PA}}+a\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

を満たしているとする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{a+\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{a+\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が成り立つ．

直線 AP と辺 BC との交点 D が辺 BC を 1：8 に内分するならば，$a=\boxed{\text{オ}}$ となり，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となる．このとき，点 P は線分 AD を $\boxed{\text{ケ}}:\boxed{\text{コ}}$ に内分する．

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{6}$ ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{サ}}$$

である．したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\frac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$$

となる．

2 一辺の長さが2の正三角形ABCの3辺AB，BC，CAの中点をそれぞれD，E，Fとする．$0<a<1$として，線分ADを$(1-a):a$に内分する点をO，線分CEを$a:(1-a)$に内分する点をPとし，直線OPと直線EFの交点をQ，直線OPと直線DFの交点をRとする．さらに，$\overrightarrow{AD}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{y}$とおく．

(1) ベクトル$\vec{x}$，$\vec{y}$は

$$|\vec{x}|=|\vec{y}|=\boxed{ア},\quad \vec{x}\cdot\vec{y}=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$$

を満たす．

(2) ベクトル$\overrightarrow{OP}$は

$$\overrightarrow{OP}=(\boxed{エオ}-\boxed{カ})\vec{x}+(\boxed{キ}-\boxed{ク})\vec{y}$$

と表される．$\overrightarrow{OP}$の大きさの2乗は

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\boxed{ケ}(a^{\boxed{コ}}-\boxed{サ}+\boxed{シ})$$

である．

(3) $\overrightarrow{OQ}$と$\overrightarrow{OR}$を$\overrightarrow{OP}$で表せば

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}-\boxed{ソ}}\overrightarrow{OP},\quad \overrightarrow{OR}=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}+\boxed{ツ}}\overrightarrow{OP}$$

である．（$\boxed{チ}$と$\boxed{ツ}$は解答の順序を問わない．）

(4) $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OB}$のなす角をθとするとき

$$\cos^2\theta=\frac{\boxed{テ}a^2}{\boxed{ト}(a^{\boxed{コ}}-\boxed{サ}+\boxed{シ})}$$

である．$\theta=45°$のとき，aの値は$a=\boxed{ナニ}+\sqrt{\boxed{ヌ}}$である．

3 OP＝1，OQ＝2，∠POQ＝90° である三角形 OPQ において，線分 OP を 2：1 に内分する点を L，線分 OQ を a：$(1-a)$ に内分する点を M とする．さらに，線分 PQ 上に点 N を ∠LMN＝90° となるようにとる．$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$ とおき，PN：NQ＝b：$(1-b)$ とする．ただし，$0<a<1$，$0<b<1$ とする．

(1) $\overrightarrow{ML}$ と $|\overrightarrow{ML}|$ は a を用いて

$$\overrightarrow{ML}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{p}-\boxed{ウ}\vec{q},\quad |\overrightarrow{ML}|=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\sqrt{1+\boxed{カ}a^2}$$

と表される．

(2) $|\overrightarrow{MN}|$ を a を用いて表そう．まず，$\overrightarrow{MN}$ は a，b を用いて

$$\overrightarrow{MN}=(1-\boxed{キ})\vec{p}+(\boxed{ク}-\boxed{ケ})\vec{q}$$

と表される．$\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{MN}=\boxed{コ}$ であるから，$b=\dfrac{1+\boxed{サ}a^2}{\boxed{シ}+\boxed{ス}a}$ である．

したがって，$|\overrightarrow{MN}|$ は a を用いて

$$|\overrightarrow{MN}|=\frac{\boxed{セ}(\boxed{ソ}-a)}{\boxed{シ}+\boxed{ス}a}\sqrt{1+\boxed{タ}a^2}$$

と表される．

(3) 三角形 LMN と三角形 QOP は相似であるとする．直線 OQ と直線 LN の交点を求めよう．

$$|\overrightarrow{ML}|=\boxed{チ}|\overrightarrow{MN}| \text{ であるから，} a=\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}},\quad b=\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}} \text{ である．}$$

s を実数とし，直線 LN 上に点 R を $\overrightarrow{LR}=s\overrightarrow{LN}$ となるようにとる．$\overrightarrow{OR}$ は s を用いて

$$\overrightarrow{OR}=\left(\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}-\frac{s}{\boxed{ハ}}\right)\vec{p}+\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}s\vec{q}$$

と表される．

$s=\dfrac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}$ のとき，R は，直線 OQ 上の点でもあるので，直線 OQ と直線 LN の交点となる．

< Note >

第 10 講　ベクトル②

【CHECK & UP】

1　点 O を原点とする座標空間において，A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(0, 2, 0) とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ．

(2)　△ABC の重心 G について，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を求めよ．

(3)　△ABC の面積を求めよ．また，O から平面 ABC に垂線を下ろしたとき平面 ABC との交点を H とする．OH の長さを求めよ．

2　正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．辺 OA を 4：3 に内分する点を P，辺 BC を 5：3 に内分する点を Q とし，線分 PQ の中点を R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　直線 AR が △OBC の定める平面と交わる点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=t\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，t の値と AR：RS を求めよ．

(3)　cos∠AOQ の値を求めよ．

3　四面体 OABC において，OA$=\sqrt{2}$，OB$=3$，OC$=2$，AB$=\sqrt{5}$，BC$=\sqrt{7}$，CA$=\sqrt{2}$ である．辺 AB の中点を D，辺 BC を 1：2 に内分する点を E とし，線分 AE と線分 CD との交点を F とする．また，点 F から平面 OBC 上におろした垂線と平面 OBC との交点を H をする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とするとき，α，β の値を求めよ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(3)　点 H は平面 OBC 上の点であることより，$\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\overrightarrow{\mathrm{FO}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{FO}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表すことができる．このとき，FH と平面 OBC が垂直であることを利用し，x，y の値を求めよ．

(4)　直線 OH と辺 BC との交点を M とするとき，BM：MC を求めよ．

＜ Note ＞

$\boxed{1}$ 四面体 OABC において，辺 OA を 1：2 に内分する点を D，辺 AB を 2：1 に内分する点を E とする．また，辺 OC の中点を F とする．

(1) $0<a<1$ として，線分 EF を $a:(1-a)$ に内分する点を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}})\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である．

(2) 3 点 O，B，C で定まる平面 OBC と直線 DG の交点を求めよう．点 P が直線 DG 上にあるとき，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$$

$$=\frac{1-\boxed{\text{ク}}\,t}{\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}})t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表せる．したがって，$t=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}})\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots①$$

であり，このとき，点 P は平面 OBC 上にある．したがって，①を満たす点 P が平面 OBC と直線 DG の交点である．

(3) (2)で求めた交点 P が辺 BC 上にあるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときである．このとき，さらに四面体 OABC が一辺の長さが 1 の正四面体ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．

＜ Note ＞

2 点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1), D(−2, −1, −2) がある．$0<a<1$ とし，線分 AB を $a:(1-a)$ に内分する点を E，線分CD を $a:(1-a)$ に内分する点を F とする．

(1) $\overrightarrow{EF}$ は a を用いて

$$\overrightarrow{EF}=(\boxed{アイ}a,\ \boxed{ウエ}a,\ \boxed{オ}-\boxed{カ}a)$$

と表される．さらに，$\overrightarrow{EF}$ が $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるのは $a=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のときである．

(2) $a=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ とする．$0<b<1$ として，線分 EF を $b:(1-b)$ に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{OG}$ は b を用いて

$$\overrightarrow{OG}=\left(\frac{\boxed{ケ}-\boxed{コ}b}{\boxed{サ}},\ \frac{\boxed{シ}-\boxed{ス}b}{\boxed{サ}},\ \frac{\boxed{セ}}{\boxed{サ}}\right)$$

と表される．

(3) (2)において，直線 OG と直線 BC が交わるときの b の値と，その交点 H の座標を求めよう．

点 H は直線 BC 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{BH}=s\overrightarrow{BC}$ と表される．また，ベクトル $\overrightarrow{OH}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OG}$ と表される．よって

$$b=\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}},\ s=\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}},\ t=\boxed{テ}$$

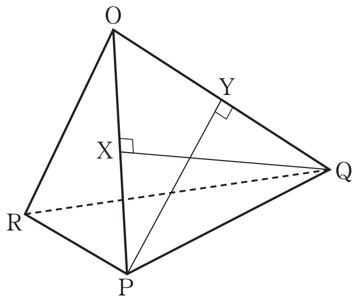
である．したがって，点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}},\ \frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ナ}},\ \boxed{ネ}\right)$$

である．また，点 H は線分 BC を $\boxed{ノ}:1$ に外分する．

< Note >

3 四面体 OPQR において，点 P，Q，R の点 O を基準とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とおく．OP=4，OQ=$3\sqrt{2}$，OR=$2\sqrt{7}$ であり，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=12$ であるとする．辺 OP 上の点 X を，直線 QX と辺 OP が垂直であるようにとり，辺 OQ 上の点 Y を，直線 PY と直線 OQ が垂直であるようにとる．



(1) 実数 a を用いて $\overrightarrow{OX}=a\vec{p}$ と表す．このとき

$$\overrightarrow{QX}=\boxed{ア}\,\vec{p}-\vec{q}$$

である．

直線 QX と辺 OP が垂直であるから，$a=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ であり，$\overrightarrow{RX}\cdot\overrightarrow{OP}=\boxed{エ}$ である．

同様に $\overrightarrow{OY}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{q}$ であり，$\overrightarrow{RY}\cdot\overrightarrow{OQ}=\boxed{キ}$ である．

(2) 直線 QX と直線 PY との交点を H とする．$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\vec{p}+\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\vec{q}$$

である．

辺 OR 上に点 Z をとり，実数 s を用いて $\overrightarrow{OZ}=s\vec{r}$ と表す．3 点 P，Q，Z の定める平面を α とし，直線 HR と平面 α との交点を K とする．実数 t を用いて $\overrightarrow{HK}=t\overrightarrow{HR}$ と表す．このとき

$$\overrightarrow{OK}=(\boxed{シ}-t)\left(\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\vec{p}+\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\vec{q}\right)+t\vec{r}$$

である．

一方，$\overrightarrow{OK}$ は実数 k，l を用いて $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PZ}+l\overrightarrow{PQ}$ とも表される．これらから

$$t=\frac{s}{\boxed{ス}-\boxed{セ}\,s}$$

である．

直線 PZ と辺 OR が垂直であるとき，$s=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ であり，$t=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である．

＜ Note ＞

第 10 講　ベクトル②

1　四面体 OPQR において，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$，$\overrightarrow{OR}=\vec{r}$ とおく．

(1)　$0<a<1$ として，線分 OP，QR を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ S，T とすると

$$\overrightarrow{OS}=\boxed{ア}\vec{p},\quad \overrightarrow{OT}=(\boxed{イ}-\boxed{ウ})\vec{q}+\boxed{エ}\vec{r}$$

である．線分 OQ，PR の中点をそれぞれ U，W とし，線分 UW を $a:(1-a)$ に内分する点を M とすれば

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\boxed{オ}}\{\boxed{カ}\vec{p}+(\boxed{キ}-\boxed{ク})\vec{q}+\boxed{ケ}\vec{r}\}$$

である．よって，M は線分 ST 上にあり

$$SM:ST=1:\boxed{コ}$$

である．直線 OM が三角形 PQR と交わる点を N とする．このとき

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}+\boxed{ス}}\overrightarrow{OM}$$

である．（$\boxed{シ}$ と $\boxed{ス}$ は解答の順序を問わない．）

さらに，点 N が三角形 PQR の重心 G と一致しているとする．このとき

$$a=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

である．

(2)　次に，$OP=OQ=\sqrt{2}$，$OR=1$，$\angle POR=90^\circ$ で，点 O と三角形 PQR の重心 G を通る直線 OG が三角形 PQR に垂直であるとき，$\angle POQ$ の大きさと線分 OG の長さを求めよう．直線 OG が三角形 PQR に垂直であるための条件は，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{QR}=0$ であるから

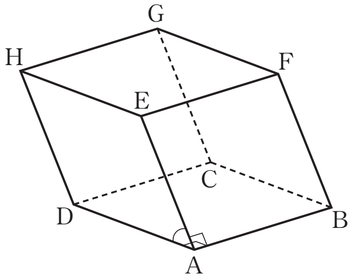
$$\vec{q}\cdot\vec{r}=\boxed{タ},\quad \vec{p}\cdot\vec{q}=\boxed{チツ}$$

である．よって

$$\angle POQ=\boxed{テトナ}^\circ,\quad OG=\frac{\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$$

である．

2 二つずつ平行な三組の平面で囲まれた立体を平行六面体という．辺の長さがすべて 1 の平行六面体 ABCD-EFGH があり，$\angle\mathrm{EAB}=\angle\mathrm{DAB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAD}=\dfrac{\pi}{3}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{r}$ とおく．



$0<a<1$，$0<b<1$ とする．辺 AB を $a:(1-a)$ の比に内分する点を X，辺 BF を $b:(1-b)$ の比に内分する点を Y とする．点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH との交点を Z とする．三角形 XYZ を含む平面を α とする．

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=$ ［ア］，$\vec{q}\cdot\vec{r}=\dfrac{［イ］}{［ウ］}$ である．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ は，a，b，$\vec{p}$，$\vec{r}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{XY}}=(1-［エ］)\vec{p}+［オ］\vec{r}$ と表される．

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=$ ［カ］ である．

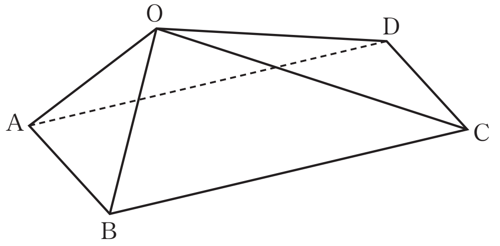
(2) 直線 EC と平面 α が垂直に交わるとし，交点を K とする．$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ が三角形 XYZ の 2 辺と垂直であることから，［キ］$a+b=$［ク］が成り立つ．

以下では，$b=\dfrac{1}{2}$ とする．このとき $a=\dfrac{［ケ］}{［コ］}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{EK}}$ を実数 c を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EK}}=c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ である．一方，点 K は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ は実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}+s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\left(\frac{1}{［サ］}s+\frac{［ケ］}{［コ］}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{［シ］}s+t\right)\vec{r}$$

と表される．これらより，$c=\dfrac{［ス］}{［セ］}$ である．よって，点 E と平面 α との距離 $|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|$ は $\dfrac{［ソ］\sqrt{［タ］}}{［チ］}$ となる．

3　四角錐(すい) O-ABCD において，三角形 OBC と三角形 OAD は合同で，OB＝1，BC＝2，OC＝$\sqrt{3}$ であり，底面の四角形 ABCD は長方形である．AB＝$2r$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．



$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\boxed{ア}}-\overrightarrow{\boxed{イ}}+\vec{c}$ である．辺 OD を 1：2 に内分する点を L とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{a}-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{エ}}\vec{b}+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{エ}}\vec{c}$$

となる．

さらに辺 OB の中点を M，3 点 A，L，M の定める平面を α とし，平面 α と辺 OC との交点を N とする．点 N は平面 α 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ は実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(\boxed{キ}-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\boxed{コ}}+\frac{t}{\boxed{サ}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\boxed{シ}}\vec{c}$$

となる．一方，点 N は辺 OC 上にもある．これらから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\vec{c}$ となる．

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{ソ}-\boxed{タ}\,r^2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{チ}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{ツテ}\,r^2$ である．よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を計算すると，AB＝$\sqrt{\boxed{ト}}$ のとき，直線 AM と直線 MN は垂直になることがわかる．

＜ Note ＞

補講　　図形と方程式

※補講には【CHECK & UP】はありません．

1 座標平面上の円 $x^2+y^2=1$ を C とする．a を正の実数とし，点 A(0, 1) を通り，傾きが a の直線を l とする．C と l の共有点のうち A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ との交点を Q とする．また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ との交点を R とする．実数 a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値を求めよう．

(1) l の方程式は $y=$ ア $x+$ イ であり，P の x 座標は

$$\frac{-\boxed{ウ}\,a}{a^{\boxed{エ}}+\boxed{オ}}$$

である．また，m の方程式は

$$\boxed{カ}\,ax+(a^{\boxed{キ}}-\boxed{ク})y+a^{\boxed{キ}}+\boxed{ケ}=0$$

である．

(2) 線分 QR の長さを s とすると

$$s=\frac{a^2+\boxed{コ}}{\boxed{サ}\,a}$$

となる．したがって，実数 a が正の値をとって動くとき，s の最小値は $\sqrt{\boxed{シ}}$ であり，そのときの a の値は $\sqrt{\boxed{ス}}$ である．

＜ Note ＞

2 座標平面上の 3 点 A(1, 1), B(3, −1), C(7, 3) を通る円を S_1 とし，その中心を D とする．

(1) 直線 AB の傾きは **アイ** であり，直線 BC の傾きは **ウ** であるから，∠ABC は $\dfrac{\pi}{\boxed{エ}}$ に等しい．したがって，S_1 の中心 D の座標は (**オ** , **カ**)，半径は $\sqrt{\boxed{キク}}$ であり，S_1 の方程式は

$$(x-\boxed{オ})^2+(y-\boxed{カ})^2=\boxed{キク}$$

となる．

k を正の定数とする．点 (0, k) を通り S_1 に接する 2 本の直線が直交するとき，k の値は **ケ** であり，それら 2 本の直線の傾きは

$$\frac{1}{\boxed{コ}} \text{ および } \boxed{サシ}$$

である．

(2) 原点を中心とする半径 1 の円を S_2 とする．点 B を通る S_2 の 2 本の接線のうち，接点の y 座標が正である接線を l とする．このとき，l の方程式は

$$\boxed{ス}x+\boxed{セ}y=\boxed{ソ}$$

である．l と S_1 の二つの交点のうち B と異なる点を E とすれば，E の座標は

$$\left(\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}, \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\right)$$

であり，三角形 BDE の面積は **ト** である．

< Note >

3　座標平面上の直線 $y=-x$ を l で表す．2 点 A(2，0)，B(2，2) と直線 l 上の点 P$(s,\ -s)$ を考える．ただし，$s \neq 2$ とする．

3 点 A，B，P を通る円 C の中心 Q は直線 $y=$ ［ア］ 上にある．点 Q の x 座標を t とおき，AQ^2，PQ^2 を s，t を用いて表すと

$$\mathrm{AQ}^2=t^2-\boxed{イ}\,t+\boxed{ウ}$$

$$\mathrm{PQ}^2=t^2-\boxed{エ}\,st+\boxed{オ}\,s^2+\boxed{カ}\,s+\boxed{キ}$$

である．

一方，$s \neq t$ のとき，直線 PQ の傾きは

$$\frac{\boxed{ク}+s}{t-s}$$

である．

円 C が直線 l と接するときの s の値と円 C の方程式を求めよう．円 C と直線 l が接するとき，直線 PQ と直線 l は垂直であるから

$$\frac{\boxed{ク}+s}{t-s}=\boxed{ケ}$$

となり

$$t=\boxed{コ}\,s+\boxed{サ}$$

と表せる．さらに，$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{PQ}^2$ であることより

$$s=\boxed{シ},\ \boxed{ス}$$

となる．ただし，［シ］ < ［ス］ とする．$s=$ ［シ］ のとき，円 C の方程式は

$$(x-\boxed{セ})^2+(y-\boxed{ソ})^2=\boxed{タ}$$

であり，また $s=$ ［ス］ のとき，円 C の方程式は

$$(x-\boxed{チ})^2+(y-\boxed{ツ})^2=\boxed{テト}$$

である．

＜ Note ＞

補講　図形と方程式

1 座標平面上で，連立不等式

$x^2+y^2 \leqq 1,\ x+y \leqq 1,\ 3x-y \leqq 3$

の表す領域を D とし，原点を中心とする半径 1 の円を C とする．a を実数とし，点 $\mathrm{A}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ を通り，傾きが a の直線を l とする．l と D が共有点をもつような a の最大値と最小値を求めよう．

(1) C と直線 $x+y=1$ の共有点の座標は

$(0,\ \boxed{ア}),\ (\boxed{イ},\ 0)$

であり，C と直線 $3x-y=3$ の共有点の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\ \dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{エ}}\right),\ (\boxed{キ},\ 0)$

である．

(2) C と l が接するのは，$a=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ または $a=-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のときであり，このときの接点の x 座標は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である．

したがって，l と D が共有点をもつような a の最大値は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であり，最小値は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$ である．

2 Oを原点とする座標平面上に点A(4, 2)をとり，2点O，Aからの距離の比が $\sqrt{3}:1$ である点の軌跡を C とする．

(1) 点Pが C 上を動くとき，三角形OAPの面積の最大値を求めよう．

Pが C 上にあるとき $\mathrm{OP}^2=$ [ア] AP^2 であるから，C は円

$$(x-\text{[イ]})^2+(y-\text{[ウ]})^2=\text{[エオ]} \quad \cdots\cdots①$$

である．

Pが円 C 上を動くとき，OAを底辺とする三角形OAPの高さの最大値は $\sqrt{\text{[カキ]}}$ であるから，三角形OAPの面積の最大値は [ク] $\sqrt{\text{[ケ]}}$ である．

また，そのときの点Pの座標は

$$(\text{[コ]}+\sqrt{\text{[サ]}},\ \text{[シ]}-\text{[ス]}\sqrt{\text{[セ]}})$$

または

$$(\text{[コ]}-\sqrt{\text{[サ]}},\ \text{[シ]}+\text{[ス]}\sqrt{\text{[セ]}})$$

である．

(2) 三角形OAPの面積が5となるような C 上の点Pで，直線OAの上側にあるものを求めよう．

三角形OAPの面積が5となるのは，Pと直線OAの距離が $\sqrt{\text{[ソ]}}$ となるときである．直線OAとの距離が $\sqrt{\text{[ソ]}}$ であり，直線OAの上側にある点 (x, y) の軌跡は直線

$$y=\frac{1}{\text{[タ]}}x+\frac{\text{[チ]}}{\text{[ツ]}} \quad \cdots\cdots②$$

である．①と②から，求める点Pの座標は

$$(\text{[テ]}+\text{[ト]}\sqrt{\text{[ナ]}},\ \text{[ニ]}+\sqrt{\text{[ヌ]}})$$

または

$$(\text{[テ]}-\text{[ト]}\sqrt{\text{[ナ]}},\ \text{[ニ]}-\sqrt{\text{[ヌ]}})$$

である．

3 実数 a に対して，座標平面で，不等式

$x^2-2ax+y^2-4y+a^2 \leqq 0$ ……①

の表す領域を A とし，連立不等式

$2x+y \leqq 24$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$

の表す領域を B とする．領域 A と領域 B が共通部分をもつとき，その共通部分を C とする．共通部分 C が a の値によりどのように変化するかを調べよう．

(1) 不等式①は

$(x-$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2 \leqq$ ウ

と変形できるので，領域 A は，点（ ア ， イ ）を中心とする半径 エ の円とその内部である．

(2) 点（ ア ， イ ）を中心とする半径 エ の円と直線 $2x+y=24$ が接する場合， オ ． オ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ 領域 A と領域 B は共通部分をもたない

① 共通部分 C は，領域 A と一致するか，または1点のみからなる

② 共通部分 C は，領域 B と一致するか，または2点のみからなる

③ 共通部分 C は，領域 A と領域 B の和集合に等しい

(3) 領域 A と領域 B が共通部分をもつような実数 a のとり得る値の範囲は

カキ $\leqq a \leqq$ クケ $+\sqrt{\text{コ}}$

である．

共通部分 C が領域 A と一致するような実数 a のとり得る値の範囲は

サ $\leqq a \leqq$ クケ $-\sqrt{\text{コ}}$

である．

共通部分 C の面積が，領域 A の面積の半分となるのは

$a=$ シ ， スセ

のときである．

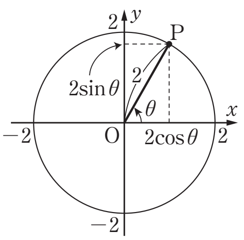
＜ Note ＞

テキスト解答

第１講　三角関数①

【CHECK & UP】

1



左図より

$P(\mathbf{2\cos\theta,\ 2\sin\theta})$

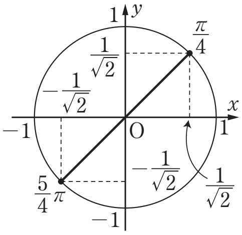
三角比・三角関数の定義から明らかであるが．一般に原点中心，半径 r の円周上の点は $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表すことができる．このときの θ は x 軸の正の方向となす角．
逆にこの形を見たら，原点中心，半径 r の円上にある点と認識できるように．

2 ［1］ (1) $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi}$　　(2) $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5}{4}\pi}$

(3) $0\leqq\beta\leqq\pi$　より　$0\leqq2\beta\leqq2\pi$

よって　$0\leqq2\beta<\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi<2\beta\leqq2\pi$

ゆえに　$\boldsymbol{0\leqq\beta<\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi<\beta\leqq\pi}$



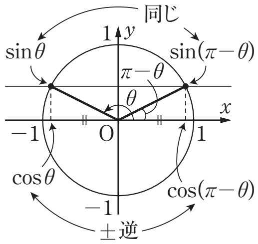
$0\leqq\theta<2\pi$ において $\sin\theta$ の値と $\cos\theta$ の値が等しいのは $\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$ のときである．これを意識すれば，角度が同じ１次三角方程式・不等式において合成や倍角の公式を用いずとも解くことができる．

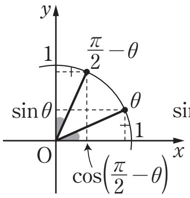
［2］ (1) $\sin\theta=\boxed{+}\sin(\boxed{\boldsymbol{\pi}}-\theta)$

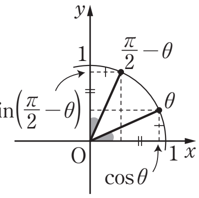
(2) $\cos\theta=\boxed{-}\cos(\boxed{\boldsymbol{\pi}}-\theta))$

(3) $\sin\theta=\boxed{+}\cos\left(\boxed{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}}-\theta\right)$

(4) $\cos\theta=\boxed{+}\sin\left(\boxed{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}}-\theta\right)$

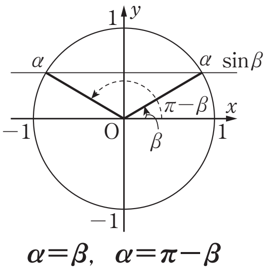






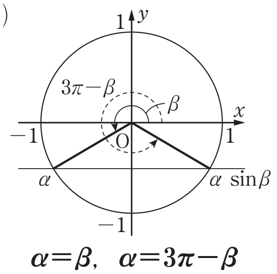
角度を変えずに sin と cos を相互に書き換えるには $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用するが，１次式には使えない．１次三角方程式・不等式の場合は「合成」が使えるが，後述の「1：1 型」であれば角度を変えてでも sin 同士，cos 同士を比べることができれば，直接角度の関係を導くことができる．また，そういう誘導が入試問題についた場合にそれに乗ることができる．

［3］ (1)



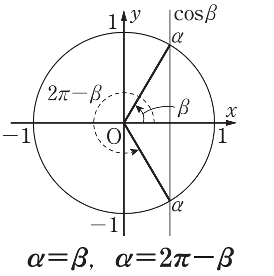
$\boldsymbol{\alpha=\beta,\ \alpha=\pi-\beta}$

(2)



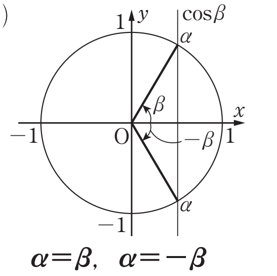
$\boldsymbol{\alpha=\beta,\ \alpha=3\pi-\beta}$

(3)



$\boldsymbol{\alpha=\beta,\ \alpha=2\pi-\beta}$

(4)



$\boldsymbol{\alpha=\beta,\ \alpha=-\beta}$

sin の値が同じ＝「高さ」が同じというイメージ．(2)で $3\pi-\beta$ というのはしっくりこない人がいるかもしれない．例えば sin の値が $-\frac{1}{2}$ になる角度は(2)の範囲で $\frac{7}{6}\pi$ と $\frac{11}{6}\pi$ で合計 3π である．他の sin の値の時も同様である．確証がないときは具体的な値で検証することも大切である．限られた時間ではあるが．
cos の値が同じときも考え方は同じ．(4)ではマイナスの角度を許しているので興味深い解答が得られている．
(1)〜(4)で挙げた以外に，α，β のとりうる範囲が異なる場合なども考えられる．ここで挙げた問題をベースとして考えてほしい．

3　[1]　(1)　$2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$　より　$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-3=0$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$　　$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)=0$

$\cos\theta=\frac{1}{2},\ 1$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi}$

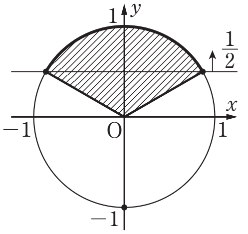
(2)　$\cos 2\theta\leqq\sin\theta$ より　$1-2\sin^2\theta\leqq\sin\theta$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq 0$　　$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)\geqq 0$

$\sin\theta\leqq-1,\ \frac{1}{2}\leqq\sin\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{3}{2}\pi}$



> 三角方程式・不等式の中には「置き換え（的発想）」により整式（２次や３次など）の方程式・不等式として途中まで扱う問題が散見される．そうして１次三角方程式，不等式に持ち込むことにより，対応する角度やその範囲を導くことができる．
> 三角関数の値とその角度を結びつける上では「単位円」が有効．その上で，角度の範囲が広がるにつれ，その周期性を活かすために「三角関数のグラフ」を用いるとよい．

[2]　$f(\theta)=\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\theta=\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi+\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

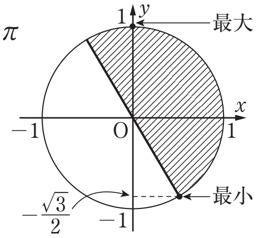
$=\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi$

よって　最大値は　**1**

最小値は　$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$



※最大値をとるのは　$\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

つまり　$\theta=\frac{5}{6}\pi$ のとき　　最小値をとるのは　$\theta=0$ のとき

> 関数の最大・最小がモチーフとなっていることから，あえて和→積の公式を利用するメリットはない．センター試験の範囲外であり，公式を用いた方が有利になる問題が出題されることも少ないと思われる．
> 合成は「加法定理の逆」であることを理解していれば，左のような変形は不要．理解していなければセンター試験特有の「誘導」に乗れないこともある．最終形が cos となる合成も視野に入れておこう．もちろん，用いるのは「cos の加法定理の逆」である．
> 合成後は与えられた角度の範囲が「ずれる」ので注意．値をとる角度を要求された時にも，ずれた角度を用いることに注意しよう．

[3]　(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$ より

$x^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$　　$\sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$

よって　$y=x^2-1-2x-3$　　ゆえに　$\boldsymbol{y=x^2-2x-4}$

また，$x=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ より　$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　　ゆえに　$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}}$

> いわゆる「典型問題」．最後が「２次関数」になるのが特徴．

(2)　$y=(x-1)^2-5$ より　$x=-\sqrt{2}$ で最大値　$\boldsymbol{-2+2\sqrt{2}}$

$x=1$ で最小値　$\boldsymbol{-5}$　をとる．

[4]　(1)　$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$　より

$$y=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}}$$

> これも「典型問題」．最後は三角関数の最大・最小．「倍角の公式」を変形して作成する，いわゆる「半角の公式」は，試験までには暗記していなければ時間的に厳しい．
> $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$
> $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
> $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

(2)　$y=\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$

$0\leqq 2\theta\leqq\pi$　より　$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$

よって　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$ のとき　最大値　$1+\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi$　つまり　$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ のとき　最小値　$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{0}$　をとる．

4　[1]　2 直線 $y=-3\sqrt{3}x+1$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ が x 軸の正の方向となす角を

それぞれ α，β とすると，$\tan\alpha=-3\sqrt{3}$，$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+(-3\sqrt{3})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2-9}=\sqrt{3}$$

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\sqrt{3}$　より　$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

> tan の加法定理．計算した結果，値がマイナスになれば鈍角，プラスなら鋭角となる．ほとんどの場合は鋭角を要求されるため，マイナスで出た場合はプラスにしたもので考えればよい．例えば $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan\dfrac{5}{6}\pi$，いわゆる 150° だが，これを 30° で出るようにしたければ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ として考えればよい．この「マイナスをプラスに変える」のが「絶対値」である．もちろんセンター試験ではマイナスをなくすだけであるが．

[2]　(1)　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2t}{1-t^2}}$

(2)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+t^2$　より　$\cos^2\theta=\boldsymbol{\dfrac{1}{1+t^2}}$

よって　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}-1=\boldsymbol{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$

(3)　$\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$ より　$\sin 2\theta=\tan 2\theta\cdot\cos 2\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\boldsymbol{\dfrac{2t}{1+t^2}}$

> tan の倍角をモチーフに，三角関数の相互関係，cos の倍角の公式を確認したであろう．(2)は $\cos^2\theta$ の誘導をつけた．これがなければ(1)の結果から直接 $\cos 2\theta$ を出すこともできる．試しに計算してみると，次数が高く苦戦する人もいるであろう．

> ※ここに挙げた問題以外にも記述試験においての基本問題は存在する．別に紹介した問題集などで演習を積んでおきたい．しかしながら近年のセンターの難化傾向を考えると，そういった基本・典型的な問題の演習だけでは歯が立たない．なぜなら「時間の制約があり解法に自由がきかない」からである．ここで挙げた問題の中に，それを攻略する鍵となる問題をちりばめてある．しっかりと理解した上で講義問題に臨んでほしい．

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1

[1]　(1)　$f(\theta)=\sin(a\theta)+\sqrt{3}\cos(a\theta)=2\left\{\sin(a\theta)\cdot\frac{1}{2}+\cos(a\theta)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\mathbf{2}\sin\left(a\theta+\frac{\pi}{\mathbf{3}}\right)$

(2)　$f(\theta)=0$ より　$2\sin\left(a\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$　　つまり　$\sin\left(a\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$　$(a>0)$

これを満たす正の角 θ のうち最小のものは　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi$　　ゆえに　$\theta=\frac{\mathbf{2}}{3a}\pi$

小さい方から数えて 2 番目は　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+\pi=2\pi$

3 番目は　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi=3\pi$

4 番目は　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+3\pi=4\pi$　　ゆえに　$\theta=\frac{\mathbf{11}}{3a}\pi$

5 番目は　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+4\pi=5\pi$　　ゆえに　$\theta=\frac{\mathbf{14}}{3a}\pi$

[2]　(1)　$A=b-a$，$B=b+a$ とおくと

$$f(\theta)=(b-a)\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+(b+a)\cos^2\theta$$
$$=\boldsymbol{a}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\mathbf{2}\boldsymbol{b}\sin\theta\cos\theta+\boldsymbol{b}$$
$$=a\cos 2\theta+b\sin 2\theta+b$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin 2\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos 2\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+b$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\mathbf{2}\theta+\alpha)+b$$

ただし，α は $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より，$\tan\alpha=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ を満たす角である．

(2)　$0\leqq\theta<\pi$ より　$0\leqq 2\theta<2\pi$　よって　$\alpha\leqq 2\theta+\alpha<2\pi+\alpha$　$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

したがって，$f(\theta)$ は

$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\frac{\pi-2\alpha}{\mathbf{4}}$ のとき　最大値　$\sqrt{a^2+b^2}+b$　をとり，

$2\theta+\alpha=\frac{3}{2}\pi$　つまり　$\theta=\frac{\mathbf{3}\pi-2\alpha}{\mathbf{4}}$ のとき　最小値　$-\sqrt{a^2+b^2}+b$　をとる．

最大値と最小値の条件より　$\sqrt{a^2+b^2}+b=10+2\sqrt{29}$，$-\sqrt{a^2+b^2}+b=10-2\sqrt{29}$

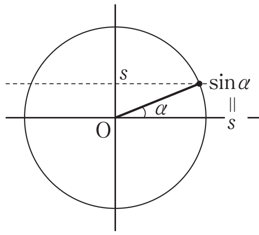
よって　$b=10$，$\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{29}$　　$a^2+100=116$　　$a=4$

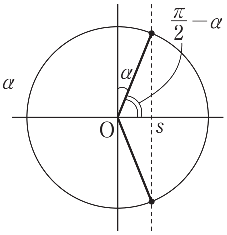
ゆえに　$A=\mathbf{6}$，$B=\mathbf{14}$

2　$\sin\alpha=\cos 2\beta$　$(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq 2\beta\leqq 2\pi)$　について

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{2}=\cos 2\beta$　よって　$2\beta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$　　ゆえに　$\beta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}},\ \boldsymbol{\dfrac{5}{6}}\pi$

$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

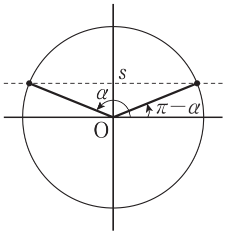


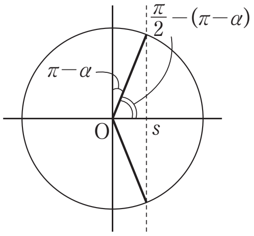


$2\beta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　よって　$\beta_1=\dfrac{\pi}{\mathbf{4}}-\dfrac{\alpha}{\mathbf{2}}$

$2\beta_2=2\pi-2\beta_1$　よって　$\beta_2=\pi-\beta_1=\dfrac{\mathbf{3}}{4}\pi+\dfrac{\alpha}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha<\pi$ のとき





$2\beta_1=\dfrac{\pi}{2}-(\pi-\alpha)$　よって　$\beta_1=-\dfrac{\pi}{\mathbf{4}}+\dfrac{\alpha}{\mathbf{2}}$

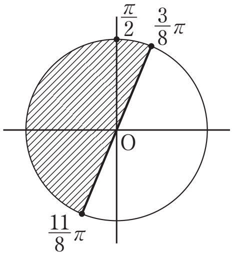
$\beta_2=\pi-\beta_1=\dfrac{\mathbf{5}}{4}\pi-\dfrac{\alpha}{2}$

よって，$\theta=\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}$ とおくと

$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{11}{12}\alpha+\dfrac{3}{8}\pi$ より　$\dfrac{3}{8}\pi\leqq\theta<\dfrac{5}{6}\pi$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$ のとき　$\theta=\dfrac{13}{12}\alpha+\dfrac{7}{24}\pi$ より　$\dfrac{5}{6}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{11}{8}\pi$　　ゆえに　$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}\pi\leqq\theta\leqq\boldsymbol{\dfrac{11}{8}}\pi$

したがって，$y=\sin\theta$ が最大となるのは



$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\dfrac{11}{12}\alpha+\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\pi}{2}$

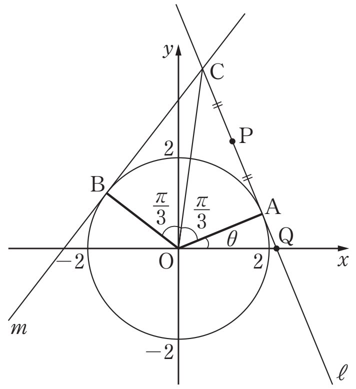
つまり　$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{3}{22}}\pi$ のときで，最大値は **1** である．

3 (1)　$\triangle\mathrm{AOC}\equiv\triangle\mathrm{BOC}$ より　$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$

したがって，$\mathrm{OC}=2\mathrm{OA}=\mathbf{4}$

また，OC が x 軸の正方向となす角は $\theta+\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$\mathrm{C}\left(\mathbf{4}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{\mathbf{3}}\right),\ \mathbf{4}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{\mathbf{3}}\right)\right)$



(2)　線分 AC の中点 P の x 座標は

$$\frac{1}{2}\left\{2\cos\theta+4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\cos\theta+2\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{2}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathbf{2}\cos\theta-\sqrt{\mathbf{3}}\sin\theta$$

であり，y 座標は

$$\frac{1}{2}\left\{2\sin\theta+4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\sin\theta+2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathbf{2}\sin\theta+\sqrt{\mathbf{3}}\cos\theta$$

である．

$\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$ より　$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\mathrm{AQ}=2\tan\theta$ より　$\triangle\mathrm{OAQ}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\tan\theta=2\tan\theta$

$\triangle\mathrm{OAC}=2\cdot\triangle\mathrm{OQA}$ より　$2\sqrt{3}=2\cdot2\tan\theta$　　$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$　　ゆえに　$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{7}},\ \frac{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{21}}}{\mathbf{7}}\right)$

第２講　指数・対数関数①

【CHECK & UP】

1 (1) $3^{x-1}=3^2\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{7}{3}}$　より　$x-1=\dfrac{7}{3}$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\dfrac{10}{3}}$

(2) $3^x<\dfrac{2}{3^x}-1$　　$3^x=t$ とおくと　$t<\dfrac{2}{t}-1$

（$t>0$ のとき対応する x が存在する．よって）

$t>0$ より　$t^2<2-t$

$t^2+t-2<0$　　$(t+2)(t-1)<0$　　$-2<t<1$

$t>0$ より　$0<t<1$

よって　$(0<)3^x<1$　　$3^x<3^0$　　ゆえに　$\boldsymbol{x<0}$

(3) $3^{x+1}=2$　より　$x+1=\log_3 2$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\log_3 2-1}$

> 基本は「相等」．底が揃っている指数関数で「1：1」状態にし，その指数部分を見る．指数方程式で項が３項（以上）に分かれている場合は単純比較ができないため「置き換え型」，つまり整式の高次方程式として扱い，最後に「相等」を用いる．その場合，置き換えたものがプラスでないと，元に戻したときに解が存在しないので注意しよう．「相等」をベースに「大小」を考える．このときは「底」a が $a>1$ か $0<a<1$ かで不等号の向きが変わるので注意．
> 底が異なる「1：1型」は，「対数」を用いる．しっくりこない人は，$x^2=3$ の解に「$\sqrt{\ }$」という記号を用いたことを思いだそう．２乗して３になる数は存在するが表せないので $\sqrt{\ }$ を用いた．同じく３を何乗すると２になるか．それを「$\log_3 2$」と表すのである．

2 (1) $\log_4 x^2-2\log_x 2+1=0$

$\log_4 x^2=2\log_4 x$

$\log_x 2=\dfrac{\log_4 2}{\log_4 x}=\dfrac{1}{\log_2 4}\cdot\dfrac{1}{\log_4 x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_4 x}$ より

$2\log_4 x-\dfrac{1}{\log_4 x}+1=0$

$\log_4 x=t$ とおくと　$2t-\dfrac{1}{t}+1=0$　　$2t^2+t-1=0$

$(2t-1)(t+1)=0$　　$t=\dfrac{1}{2}，-1$

$\log_4 x=\dfrac{1}{2}$ より　$x=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{2}$

$\log_4 x=-1$ より　$x=4^{-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\log_3(x-2)+\log_3(x-3)-\log_3(x+1)\leqq 0$

(真数)>0 より　$x>2$，$x>3$，$x>-1$　ゆえに　$x>3$

$\log_3(x-2)(x-3)\leqq\log_3(x+1)$

よって　$(x-2)(x-3)\leqq x+1$　　$x^2-6x+5\leqq 0$

$(x-1)(x-5)\leqq 0$　　ゆえに　$1\leqq x\leqq 5$

これと，$x>3$ より　$\boldsymbol{3<x\leqq 5}$

> 対数に関しても「相等」が基本であるが，「底の変換」により底を揃えることが大前提．その上で「真数」が同じものが複数あれば「置き換え型」→「1：1」に持ち込むことができる．ただし log はあくまで「底を何乗すると真数になるか」を表したもの．log の値を出す，log の値から真数を出す，いずれにしてもそれを忘れてはいけない．また，真数は底を何乗かした結果であるから「正」でなければならない．いわゆる「真数条件」と呼ばれるものである．最初に真数条件を考える，最後に真数が正かどうか検証する，いずれにしても忘れてはならない．

> 対数方程式・不等式で，log の真数部分に「和・差」の形を含む場合は，形の異なる log が残って置き換えることができないことがある．その場合は，１つにまとめて「1：1型」に持ち込む．注意点は「差」である．
> $\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$ であるが，方程式・不等式でこの形に持ち込むことはない．なぜなら「移項」により「差」のマイナスは「和」のプラスに変わるからである．もちろん関数の場合は移項ができないためにやむを得ない．
> 対数の大小に関しても，指数と同様「相等」をベースに「大小」を考える．「底」a が $a>1$ か $0<a<1$ かで不等号の向きが変わる．

3 (1)　相加平均≧相乗平均より　$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=-x$ より　$x=0$ のとき

よって t の最小値は $\mathbf{2}$

指数関数は「正」であり，かつそれを「隠す」ことができるため，「相加平均≧相乗平均」とは入試的に相性がよい．

(2)　$y=4\cdot 8^x-24\cdot 4^x+57\cdot 2^x-73+57\cdot 2^{-x}-24\cdot 4^{-x}+4\cdot 8^{-x}$

$=4(8^x+8^{-x})-24(4^x+4^{-x})+57(2^x+2^{-x})-73$

$=4\{(2^x)^3+(2^{-x})^3\}-24\{(2^x)^2+(2^{-x})^2\}+57(2^x+2^{-x})-73$

$=4\{(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})\}-24\{(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}\}+57(2^x+2^{-x})-73$

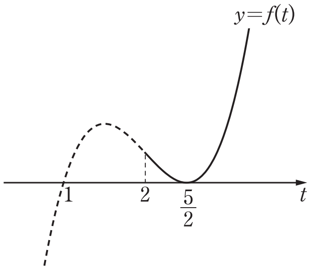
$=4(t^3-3t)-24(t^2-2)+57t-73$

$=\mathbf{4t^3-24t^2+45t-25}$

指数のマイナスは「逆数」であるが，「対称式変形」ではこのようにそのままにしておくことも．

(3)　$y=f(t)=\mathbf{(t-1)(2t-5)^2}$　また，(1)より　$t\geqq 2$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右図．



したがって　$t=\dfrac{5}{2}$ のとき　y は最小値 $\mathbf{0}$ をとる．

$t=\dfrac{5}{2}$ より　$2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$　　$2^x+\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{5}{2}$

$2^x=s$ とおくと　$s+\dfrac{1}{s}=\dfrac{5}{2}$　　$2s^2-5s+2=0$

$(2s-1)(s-2)=0$　　$s=\dfrac{1}{2}$，2　　$2^x=\dfrac{1}{2}$，2　　ゆえに　$\mathbf{x=-1,\ 1}$

「微分法」を用いることも可能であるが，「因数分解」された式よりグラフがわかる．後の「微分法・積分法」の講を参照されたし．因数分解は「組立除法」が便利．

4 (1)　(真数)>0 より　$y>0$，$x>-2$，$x<\dfrac{10}{7}$，$x<\dfrac{20}{3}$

よって　$-2<x<\dfrac{10}{7}$　かつ　$y>0$

$1+\log_3(x+2)=\log_3 3+\log_3(x+2)=\log_3 3(x+2)$ より

$\log_3 y\leqq \log_3 3(x+2)$　　ゆえに　$y\leqq 3(x+2)$　……①

$1+\log_3(10-7x)=\log_3 3(10-7x)$ より

$\log_3 y\leqq 3(10-7x)$　　ゆえに　$y\leqq 3(10-7x)$　……②

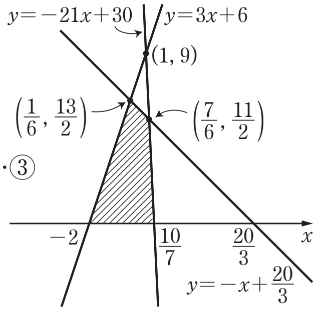
$1+\log_3 y=\log_3 3y$ より

$\log_3 3y\leqq \log_3(20-3x)$　ゆえに　$y\leqq \dfrac{1}{3}(20-3x)$　……③

①，②，③と真数条件より，領域 D は右図斜線部

(境界は x 軸を含まず他は含む)．

$N=\log_a a^N$ である．1：1型を扱うときには必修である．



「線形計画法」をモチーフとした問題．領域の境界が交わる点を求めておこう．

(2)　$x-2y=k$ とおき，$y=\frac{1}{2}x-\frac{k}{2}$ が領域 D を通るとき y 切片 $-\frac{k}{2}$ が最大になるときを求める．

それは，グラフより $\left(\frac{1}{6},\ \frac{13}{2}\right)$ を通るときである．

ゆえに，k の最小値は　$\frac{1}{6}-2\cdot\frac{13}{2}=\mathbf{-\frac{77}{6}}$　である．

※指数関数・対数関数のセンター試験における難易度は，三角関数と比較すると比較的落ち着いている．ただし変形のスピードや正確性に欠けると時間を浪費しやすい．また，センター試験全体に言えることだが，誘導の意味を見失うと途中で何をやっているのかわからなくなる．最終的に何を出したいのかについて，問題全体を眺めてから解き始めることをお勧めしたい．

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1

［1］ (1) $f(x)=3^x+3^{-x}$ より $f(x-1)=3^{x-1}+3^{-x+1}=\mathbf{\frac{1}{3}}\cdot 3^x+\mathbf{3}\cdot 3^{-x}$

$f(x-1)=f(x)$ より $\frac{1}{3}\cdot 3^x+3\cdot 3^{-x}=3^x+3^{-x}$

$\frac{2}{3}\cdot 3^x=2\cdot 3^{-x}$　　$3^{x-1}=3^{-x}$　　$x-1=-x$　　ゆえに $x=\mathbf{\frac{1}{2}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

(2) $y=\log_2\left(\frac{x}{2}+3\right)=\log_2\frac{1}{2}(x+6)=\log_2\frac{1}{2}+\log_2(x+6)=\log_2(x+6)-1$

このグラフは $y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に $\mathbf{-6}$，y 軸方向に $\mathbf{-1}$ 平行移動したものである．

2 グラフの共有点の x 座標は　$\log_2\left(\frac{x}{2}+3\right)=\log_2 x$　　$\frac{x}{2}+3=x$　より　$x=\mathbf{6}$

y 座標は　$\log_2 6=\log_2 2\cdot 3=1+\log_2\mathbf{3}$

［2］ (1) $5p^x-\frac{1}{p^x}=q\left(p^x+\frac{1}{p^x}\right)$ で $p^x=t$ とおくと，

$t>0$ である t の値 1 つにつき x が 1 つ対応する．

$5t^2-1=qt^2+q$　　$(5-q)t^2=1+q$　……①　　ゆえに　$p^{2x}(\mathbf{5}-q)=\mathbf{1}+q$

この t の方程式①が解をもつのは，$5-q$ と $1+q$ が同符号のときである．

よって　$(5-q)(1+q)>0$ より，求める q の範囲は　$\mathbf{-1}<q<\mathbf{5}$　である．

(2) $p=3$，$q=\frac{1}{2}$ のとき　$\frac{9}{2}t^2=\frac{3}{2}$　　$t^2=\frac{1}{3}$　　$t=+\frac{\sqrt{3}}{3}$

つまり　$3^x=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=3^{-\frac{1}{2}}$　より　$x=\mathbf{-\frac{1}{2}}$　である．

2 ［1］ $2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5$ ……(＊)

(1) 底の条件より　$\boldsymbol{x>0}$　かつ　$\boldsymbol{x\neq 1}$

また　$\log_x 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 x} = \dfrac{\mathbf{3}}{\log_3 x}$

(2) (＊)より　$2\log_3 x - \dfrac{12}{\log_3 x} \leqq 5$

$0<x<1$ のとき　$\mathbf{2}(\log_3 x)^2 - \mathbf{5}\log_3 x - \mathbf{12} \geqq 0$ ……①

$x>1$ のとき　$2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 12 \leqq 0$ ……②

①で $\log_3 x = t$ とおくと　$t<0$　$2t^2-5t-12\geqq 0$　$t\leqq -\dfrac{3}{2}$，$4\leqq t$

$t<0$ より　$t\leqq -\dfrac{3}{2}$　よって　$\log_3 x \leqq -\dfrac{3}{2}$ より　$0<x\leqq 3^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

②で $\log_3 x = t$ とおくと　$t>0$　$2t^2-5t-12\leqq 0$　$-\dfrac{3}{2}\leqq t\leqq 4$

$t>0$ より　$0<t\leqq 4$　よって　$0<\log_3 x\leqq 4$ より　$1<x\leqq 3^4=81$

したがって，求める x の値の範囲は　$0<x\leqq \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{9}}$，$1<x\leqq \mathbf{81}$

［2］ $\log_2(x+a)+\log_2(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}(4-4a)<0$

真数は正であることより　$x>\boldsymbol{-a}$　かつ　$x>\mathbf{3}$　かつ　$a<\mathbf{1}$

ここで　$\log_{\frac{1}{2}}(4-4a) = \dfrac{\log_2(4-4a)}{\log_2\frac{1}{2}} = -\log_2(4-4a)$ であることより

$\log_2(x+a)(x-3) < \log_2(4-4a)$

$(x+a)(x-3)<4-4a$　$x^2+(a-3)x+a-4<0$　$(x+\boldsymbol{a}-\mathbf{4})(x+\mathbf{1})<0$

$a<1$ より　$3<4-a$　よって　$-1<x<4-a$

ゆえに　$3<-a$　つまり　$a<-3$ のとき　$\boldsymbol{-a}<x<\mathbf{4}\boldsymbol{-a}$

$-3\leqq a<1$ のとき　$\mathbf{3}<x<\mathbf{4}\boldsymbol{-a}$

3 ①より　$4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 9\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x + 13 = a$

(1) $X=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ とおくと　$\mathbf{9}X+\dfrac{\mathbf{4}}{X}+\mathbf{13}=a$　$9X^2-(a-13)X+4=0$ ……②′

②′が $X>0$ に異なる２つの正の解をもつときを考える．

②′の判別式を D とすると　$D=(a-13)^2-4\cdot 9\cdot 4=(a-25)(a-1)$

②の左辺を $f(X)$ とすると，$f(0)=4>0$　また，$f(X)$ の軸は　$X=\dfrac{a-13}{18}$

よって　$(a-25)(a-1)>0$　$\dfrac{a-13}{18}>0$　であればよい．　ゆえに　$a>\mathbf{25}$

このとき，②は正の 2 解 X_1，X_2 をもち，それぞれに対して x が 1 つずつ対応する．

解と係数の関係より　$X_1\cdot X_2=\dfrac{4}{9}$

$X_1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x_1}$，$X_2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x_2}$　とすると

$$X_1\cdot X_2=\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2}\qquad つまり\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2}=\frac{4}{9}$$

ゆえに　$x_1+x_2=\mathbf{-2}$

(2)　$a=50$ のとき

②は　$9X^2-37X+4=0$　　$X=\mathbf{4},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$

$X=4$ のとき　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=4$　　よって　$x=\log_{\frac{3}{2}}4=\dfrac{\log_2 4}{\log_2\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2}{\log_2 3-1}$

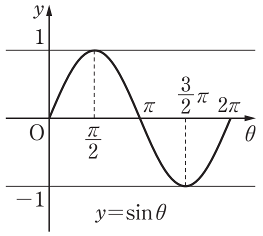
$X=\dfrac{1}{9}$ のとき　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{1}{9}$　　よって　$x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{9}=\dfrac{\log_2\dfrac{1}{9}}{\log_2\dfrac{3}{2}}=\dfrac{-2\log_2 3}{\log_2 3-1}$

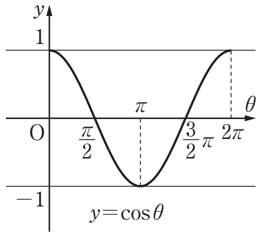
ゆえに　$x=\dfrac{\mathbf{2}}{\log_2 3-\mathbf{1}}$，$\dfrac{\mathbf{-2}\log_2 3}{\log_2 3-1}$

第３講　三角・指数・対数関数②

【CHECK & UP】

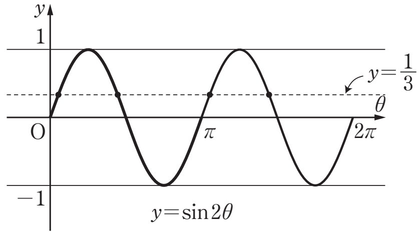
1 (1)





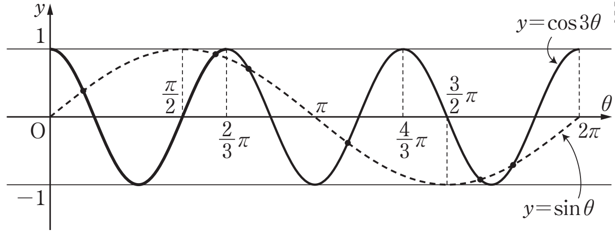
(2) (i) (1)のグラフより　**2 個**

(ii) $y=\sin 2\theta$ のグラフの周期は　$2\pi\times\dfrac{1}{2}=\pi$



よって　**4 個**

(iii) $y=\cos 3\theta$ のグラフの周期は　$2\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$



よって　**6 個**

三角関数のグラフは，センター試験のみならず数学ⅠＡⅡＢの範囲の中では出番は少ない．その中でも，「周期」と「方程式の解の個数」はその数少ない出番の代表である．

$\sin\theta$，$\cos\theta$ の周期（のうち正で最も小さいもの）は 2π である．この周期がおとずれる度に，グラフは同じ動きを繰り返す．変域の許す限りそれは続く．

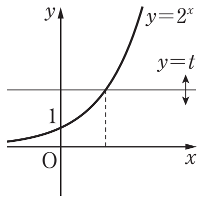
そのグラフを半分進むのに π，さらにその半分進むのに $\dfrac{\pi}{2}$ 必要である．この「$\dfrac{1}{2}$ 周期」「$\dfrac{1}{4}$ 周期」の考え方は，周期が変化したりグラフが平行移動しても変わらない．例えば(3)の周期は $\dfrac{2}{3}\pi$，その $\dfrac{1}{4}$ 周期は $\dfrac{\pi}{6}$ である．それが３つ分で $\dfrac{3}{6}\pi$ すなわち $\dfrac{\pi}{2}$ であることがわかるだろうか．

これにより，解そのものではなく「解の個数」を要求されているとき，グラフを描くことでその個数がわかる．

2 (1) 右図実線部分

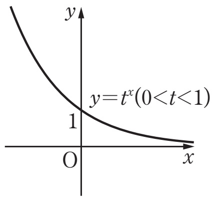
(2) グラフより　$\boldsymbol{t=1}$

(3) グラフより　$\boldsymbol{t>1}$



(4) グラフより　$0<t<1$ のとき．

このときの $y=t^x$ のグラフは右図．



指数を含む方程式・不等式において「置き換え」を想定した問題である．

a^x　$(a>1)$ において

$x=0 \Leftrightarrow a^x=1$ を境にして

$x>0 \Leftrightarrow a^x>1$

$x<0 \Leftrightarrow 0<a^x<1$

である．

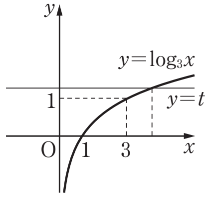
置き換えた文字に関する方程式の解が「1 より大きいか，0 から 1 の間か」で，指数 x の正負が決まる．

3 (1) 右図実線部分．

(2) (i) グラフより　$\boldsymbol{x=1}$

(ii) グラフより　$\boldsymbol{0<x<1}$

(iii) グラフより　$\boldsymbol{x\geqq 3}$

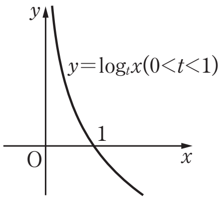


(3) グラフより　$0<\log_3 2<1$　　つまり　$0<t<1$

このときの $y=\log_t x$ のグラフは右図．

(4) $\log_3 27<\log_3 30<\log_3 81$ より

$3<t<4$　よって，t の整数部分は **3**



先ほどの対数バージョンである．真数が正であるため，真数 x の正負が問われることはない．よって，新たなる分岐点「真数が底と同じ値のとき」が発生し，その点において y 座標は 1 である．よって置き換えた文字に関する方程式の解が「0 より小さいか，0 から 1 の間か，1 より大きいか」で，真数 x がどこの範囲にあるかが決まる．さらに，真数が莫大に大きくなっても対数の値はさほど大きくならないことにも注目．

4　$\sin\theta=\dfrac{3}{4}=0.75$

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}=0.5$　　$\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1.41\cdots}{2}=0.70\cdots$

$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1.73\cdots}{2}=0.86\cdots$

よって　$\sin\dfrac{\pi}{4}<\sin\theta<\sin\dfrac{\pi}{3}$　　ゆえに　②

三角関数の「値の評価」である．有名角をとる値だけが出題されるわけではない．出題された三角関数の値と，有名角をとる値を比較し，どの値とどの値の間にあるかを判断する必要がある．この評価の際に有効な
$\sqrt{2}=1.41\cdots$
$\sqrt{3}=1.73\cdots$
$\sqrt{5}=2.23\cdots$
といった近似値は覚えておこう．

5　$2^n-2^m=12$　から　$2^n>12$　　よって　$n\geqq 4$

$a_k=2^k$ とすると　$\{a_k\}$：2，4，8，16，32，64，…

また，$\{a_k\}$ の階差数列を $\{b_k\}$ とすると

$\{b_k\}$：2，4，8，16，32，…

よって　$n\geqq 5$ のときは　$2^n-2^m=12$　を満たす自然数 m，n は存在しない．したがって　$n=4$ に限られる．

このとき　$2^4-2^m=12$ より　$2^m=4$　　$m=2$

ゆえに　$\boldsymbol{n=4,\ m=2}$

指数・対数関数は「単調増加・単調減少」である．特に指数関数は爆発的に増加（減少）するため，指数を１つずつ増加させながら検証する問題が散見される．特にセンター試験においては，指数の桁数や解の個数などがわかるため予想もしやすい．センター試験であれば $n\leqq 4$ であることから $n=4$，$m=2$ が見つかった時点で終了である．

6　$0.5<2<3$ であり，$1.5>1$ より　$0.5^{1.5}<2^{1.5}<3^{1.5}$

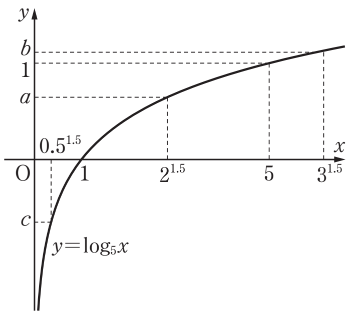
よって　$c<a<b$

$0.5^{1.5}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}<1$　より　$c<0$

$2^{1.5}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}$　より　$0<a<1$

$3^{1.5}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}>5$　より　$1<b$

ゆえに　$\boldsymbol{c<a<1<b}$



指数・対数の大小関係に関する問題である．底の大きさ，指数の大きさ，真数の大きさなどに注目し，さらにグラフを用いながら考える．

※三角関数・指数関数・対数関数において，方程式・不等式および関数の最大・最小についての練習についてはどの問題集でも多く積むことができるが，解の個数や存在範囲，値の評価などは練習が不足しがちである．この講義を終えた後に色本などで数多くの「センター向けの問題」に多く触れることで，この分野が単独で出題されたときの「重さ」とその攻略法が身についていくことであろう．

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　$5\sin\theta-3\cos 2\theta=3$ より　$5\sin\theta-3(1-2\sin^2\theta)=3$　　$\mathbf{6}\sin^2\theta+5\sin\theta-\mathbf{6}=0$

$(2\sin\theta+3)(3\sin\theta-2)=0$　　よって　$\sin\theta=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　ゆえに　$\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{\mathbf{5}}}{3}$　$\cos\theta_2=\mathbf{-}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

ここで　$\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{\mathbf{5}}}{3}=\dfrac{2.23\cdots}{3}=0.74\cdots$

$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1.41\cdots}{2}=0.70\cdots$　　$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3.23\cdots}{4}=0.80\cdots$　であることより

$\cos\dfrac{\pi}{4}<\cos\theta_1<\cos\dfrac{\pi}{5}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{5}<\theta_1<\dfrac{\pi}{4}}$　……①

また，$n\theta_1>\theta_2$　より　$n\theta_1>\pi-\theta_1$　　$\theta_1>\dfrac{\pi}{n+1}$

これを満たす最小の自然数 n は①より　$n=\mathbf{4}$

2　［1］　$12(\log_2\sqrt{x})^2-7\log_4 x-10>0$　……①

$\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2 x$　　$\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 x}{2}$　であることより

$3X^2-\dfrac{7}{2}X-10>0$　　$6X^2-\mathbf{7}X-\mathbf{20}>0$　　$(3X+4)(2X-5)>0$

よって　$X<-\mathbf{\dfrac{4}{3}}$，$\mathbf{\dfrac{5}{2}}<X$　より　$\log_2 x<-\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{2}<\log_2 x$

したがって　$x<2^{-\frac{4}{3}}$，$2^{\frac{5}{2}}<x$　　ゆえに，①を満たす最小の自然数 x は $x=\mathbf{6}$

$x+\log_3 x<14$　……②

$x=11$ のとき　②の左辺 $=11+\log_3 11=13.\cdots$

$x=12$ のとき　②の左辺 $=12+\log_3 12=14.\cdots$

ゆえに，②を満たす最大の自然数 x は　$x=\mathbf{11}$

よって，求める自然数 x の範囲は　$6\leqq x\leqq 11$

［2］　$a=\log_3 x-\dfrac{7}{2}$　$b=\log_3 x-\dfrac{5}{2}$

$c=\log_9 x-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}\log_3 x-\dfrac{5}{2}$　$d=\log_9 x-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\log_3 x-\dfrac{3}{2}$

(1)　$d=0$ より　$\log_9 x=\dfrac{3}{2}$　　よって　$x=9^{\frac{3}{2}}=3^3=\mathbf{27}$

(2)　$abcd>0$ となる x について

$a>0$ となるのは　$\log_3 x>\dfrac{7}{2}$　より　$x>3^{\frac{7}{2}}=27\sqrt{3}$　のとき

$b>0$ となるのは　$\log_3 x>\dfrac{5}{2}$　より　$x>3^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}$　のとき

$c>0$ となるのは　$\log_9 x>\dfrac{5}{2}$　より　$x>9^{\frac{5}{2}}=(3^2)^{\frac{5}{2}}=3^5=243$　のとき

$d>0$ となるのは　$x>27$　のとき

よって，a，b，c，d がすべて負になるのは　$0<x<\mathbf{9\sqrt{3}}$　のとき

2 つが正，2 つが負となるのは　$\mathbf{27}<x<\mathbf{27\sqrt{3}}$　のとき

すべて正となるのは　$\mathbf{243}<x$　のときである．

(3)　$27<x<27\sqrt{3}$ のとき　b と d が正，a と c が負である．

$$b-d=\frac{1}{2}\log_3 x-1=\frac{1}{2}(\log_3 x-2)=\frac{1}{2}(\log_3 x-\log_3 9)>0 \qquad \text{よって}\quad b>d$$

$$a-c=\frac{1}{2}\log_3 x-1>0 \qquad \text{よって}\quad a>c \qquad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{c<a<d<b}$$

3　$x^2+\sqrt{2}=X$ とおくと　$X\geqq\sqrt{2}$　　よって　$\log_2(x^2+\sqrt{2})=\log_2 X$　は，$x=\mathbf{0}$ のとき最小値　$\log_2\sqrt{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　をとる．ゆえに　$\log_2 X\geqq\dfrac{1}{2}$

ここで　$\{\log_2(x^2+\sqrt{2})\}^2-2\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0$　……①　について

$\log_2(x^2+\sqrt{2})=\log_2 X=t$ とおくと　$t\geqq\dfrac{1}{2}$ である．このとき，①すなわち

$t^2-2t+a=0$　が　$t\geqq\dfrac{1}{2}$　に少なくとも 1 解をもつときの a の範囲を考える．

ここで　$a=-t^2+2t$ と変形することにより，

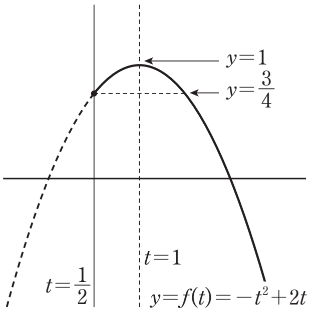
$y=f(t)=-t^2+2t$ と $y=a$ が $t\geqq\dfrac{1}{2}$ に少なくとも 1 つの共有点をもつときを考える．

　$f(t)=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$　より，それは　$a\leqq\mathbf{1}$　である．

$a=1$ のとき方程式①は **2** 個の解をもつ．

①を満たす x が 3 個あるのは X が $\sqrt{2}$ と，$\sqrt{2}$ より大きい値のとき，すなわち t が $\dfrac{1}{2}$ と，$\dfrac{1}{2}$ より大きい値のときである．

それは，グラフより　$a=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$　のときである．



第４講　微分法・積分法①

【CHECK & UP】

1 ［1］ (1) $f'(x)=3x^2-5$　　$f'(2)=7$

よって接線 l の方程式は　$y=7(x-2)-1$

ゆえに　l：$\boldsymbol{y=7x-15}$

また，法線 m の方程式は　$y=-\dfrac{1}{7}(x-2)-1$

ゆえに　m：$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{5}{7}}$

まずは接線の前に直線の方程式について．傾き m，点 $(a,\ b)$ を通る直接は $y=m(x-a)+b$ である．
未だに $y-b=m(x-a)$ としている人はいないだろうか．スピードと正確性が要求されるセンター試験において，移項の時間とそれによる符号変化のミスは致命的だ．接線においては，元の式を微分したものに接点の x 座標を代入したものが傾きである．

(2) 接線 l と $y=f(x)$ の交点の x 座標は

$x^3-5x+1=7x-15$　　$x^3-12x+16=0$

$(x-2)^2(x+4)=0$　　$x=2,\ -4$

よって，接点以外に交わる点の x 座標は

$\boldsymbol{x=-4}$

３次関数においては接線が再び元の曲線と交わることがある．その際，２式を連立したものは接点の x 座標を「重解」にもつ．それを利用すれば因数分解はたやすく，それにより接点以外の交点が出る．

［2］ $y=x^3-3x^2+1$　より　$y'=3x^2-6x$

$x=t$ における接線の傾きは　$3t^2-6t$

接線の方程式は　$y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2+1$

よって　$y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+1$

これが $(0,\ 6)$ を通るとき，

$6=-2t^3+3t^2+1$　　$2t^3-3t^2+5=0$

$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$　　t は実数より　$t=-1$

よって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=9x+6}$

$(0,\ 6)$ を通る直線は $y=mx+6$ と表すことができるが，これを３次関数のグラフと「接する状態にする」ことが困難である．よって，「接点の場所が不定の接線」つまり「接点が動く接線」を作り，それが $(0,\ 6)$ を通る条件を満たす，という解法をとることで「接点が後からわかる」のである．センター試験ではこの「接点の x 座標」が「指定された文字で与えられる」ことが多い．
３次方程式の一般的な解法は「因数分解」．上の問題と異なり解が不明であるため「組立除法」が必須の知識となる．

2 ［1］ **【解法１】** $(3,\ 4)$ を通る求める直線は

$y=m(x-3)+4$　とおくことができる．

この直線と　$y=-x^2+4x-3$　の交点の x 座標は

$-x^2+4x-3=m(x-3)+4$

つまり　$x^2+(m-4)x-3m+7=0$　の解．

接するのはこの方程式が重解をもつとき．

この方程式の判別式を D とすると

$D=(m-4)^2-4(-3m+7)=0$　　$m^2+4m-12=0$

$m=2,\ -6$　　このとき重解　$x=\dfrac{4-m}{2}$　をもつ．

よって，求める接線および接点の x 座標は

$\boldsymbol{y=2x-2,\ x=1}$　　$\boldsymbol{y=-6x+22,\ x=5}$

相手が「放物線」であれば，接する状態にすることは容易である．それは「交点を求める方程式」が「重解」をもつことを「判別式 D」で扱うことができるからである．ただし，微分法による解答と異なり，「接点の x 座標」は方程式の「重解」として求める必要がある．重解の公式 $x=\dfrac{-b}{2a}$ は既知であろうか．
センター試験においては自ら上記の解法をとることは少ないが，「直線が与えられていて，それを２次関数に接させる」「ある曲線の接線を別の２次関数とも接する状態にしたい（後述）」等の問題で見られる．誘導に乗れるようにしておきたい．ただし「直線 $y=mx+n$ が …」といったフェイントもある．

【解法２】 $y=-x^2+4x-3$ より $y'=-2x+4$ 　$x=t$ における接線の傾きは

$-2t+4$ 接線の方程式は $y=(-2t+4)(x-t)-t^2+4t-3$

よって $y=(-2t+4)x+t^2-3$

これが $(3,\ 4)$ を通るとき $4=(-2t+4)\cdot 3+t^2-3$ 　$t^2-6t+5=0$ 　$t=1,\ 5$

よって求める接線および接点の x 座標は

$\boldsymbol{y=2x-2,\ x=1}$ 　$\boldsymbol{y=-6x+22,\ x=5}$

1 [2] と同様の解法である．

[2] $y=x^3-ax+2$ より $y'=3x^2-a$ 　$x=t$ における接線の傾きは $3t^2-a$

接線の方程式は $y=(3t^2-a)(x-t)+t^3-at+2$ よって $y=(3t^2-a)x-2t^3+2$

これが $y=2x$ と一致するとき $3t^2-a=2$ かつ $-2t^3+2=0$

よって $t=1$ 　このとき $\boldsymbol{a=1}$

接線を作り，直線と係数比較した．

3 [1] $y=x^2+5$ より $y'=2x$ 　$x=t$ における接線の方程式は

$y=2t(x-t)+t^2+5$ つまり $y=2tx-t^2+5$ ……①

【解法１】 これが $y=-2x^2-1$ と接するのは，この 2 式から y を消去し，x について整理した式 $2x^2+2tx-t^2+6=0$ が重解をもつときである．よって $t^2-4=0$ 　$t=\pm 2$

ゆえに，求める共通接線の方程式は

$\boldsymbol{y=4x+1,\ y=-4x+1}$

【解法２】 $y=-2x^2-1$ より $y'=-4x$

$x=s$ における接線の方程式は $y=-4s(x-s)-2s^2-1$

つまり $y=-4sx+2s^2-1$ ……②

①と②が一致するとき $2t=-4s$ かつ $-t^2+5=2s^2-1$

よって $s=\pm 1$ 　このとき $t=\mp 2$ （複号同順）

ゆえに，求める共通接線の方程式は $\boldsymbol{y=4x+1,\ y=-4x+1}$

共通接線（接点が別）においては，２放物線であれば解法は様々．
（解法１）では一方の接線をつくり，もう一方と接する状態にした．接点の x 座標を要求されたときには，もう一方は上記の「重解」を求める必要がある．
（解法２）では両方の接線をつくり，係数比較した．
この解法は「２接点の x 座標が出る」ため，「面積」につなげやすい．
ちなみに今回の２放物線は「軸が同じ」であるため軸について対称な２本の共通接線が存在する．

[2] $y=2x^3$ より $y'=6x^2$

$x=t$ における接線の傾きは $6t^2$

$y=3x^2+a$ より $y'=6x$

$x=t$ における接線の傾きは $6t$

この 2 つの傾きが一致し，

かつ $x=t$ における 2 曲線の y 座標が一致するとき，

$6t^2=6t$ かつ $2t^3=3t^2+a$

よって $t=0,\ 1$ 　このとき，a はそれぞれ $0,\ -1$ であり，

2 曲線は $x=t$ において共通接線をもち，

2 曲線はこの点で接する．ゆえに，求める a は $\boldsymbol{a=0,\ -1}$

２曲線が「接する」すなわちある点において共通接線をもつ．つまり「接点が同じ」である．「接点が別」とは異なり，「接線の方程式」を２本作成することは不要．なぜならば，「接点の y 座標」が同じであるため．これは接線の方程式を作らずとも比較できることである．共通接線が必要ならば，接点の x 座標が「確定」したあとにゆっくり求めればよい．
この問題の解 a から２グラフの状態を図示してみよ．当然，接点以外の交点を出してからであるが．

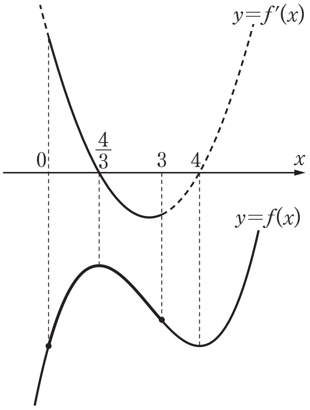
4　$f(x)=\frac{9}{8}x^3-9x^2+18x$　より

$$f'(x)=\frac{27}{8}x^2-18x+18$$
$$=\frac{9}{8}(3x^2-16x+16)$$
$$=\frac{9}{8}(3x-4)(x-4)$$

よって，最大値をとる x は　$\boldsymbol{x=\frac{4}{3}}$

また，$f(0)=0$，$f(3)=\frac{27}{8}$ より

最小値をとる x は　$\boldsymbol{x=0}$



$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ は増加
$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ は減少
よって，$f'(x)$ の正負により $f(x)$ の増減がわかることは言うまでもない．その上で，$f'(x)$ の正負は「グラフ」によってわかることを強く意識しているであろうか．決して「増減表を書くことを目的」としてはいけない．さらに $f(x)$ が因数分解でき，かつ「重解をもつ」ならば微分をしなくても $f(x)$ の極大・極小をとる x がわかるが，それは講義で扱う．

5　$2x^3-12x^2+18x+k=0$　より　$k=-2x^3+12x^2-18x$

$f(x)=-2x^3+12x^2-18x$ とおき，$y=f(x)$ と $y=k$ の共有点の個数が求める解の個数である．

$$f'(x)=-6x^2+24x-18=-6(x-1)(x-3)$$

$x=3$ で極大値　$f(3)=0$

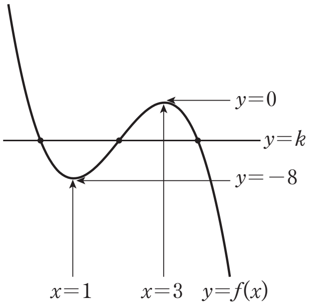
$x=1$ で極小値　$f(1)=-8$　をとる．

よって，グラフより

$k<-8$，$0<k$ のとき　1 個

$k=-8$，0 のとき　2 個

$-8<k<0$ のとき　3 個



３次方程式には２次方程式で多用される「判別式」が存在しない．よって，「３次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標」として扱う．
この問題のように「定数分離」できる場合は，３次関数のグラフが「確定」するので非常に扱いやすい．センター試験でもこの形式のものが散見される．もちろん，分離できない場合は，極大値・極小値の符号（または２極値の積）で解の個数を制御する必要があり，センター試験でも出題例がある．

配点が高い「微分法・積分法」において，まったく時間のロスが許されないのが「微分」に関するパートである．わかっているはずの知識も，時間内に収めることができて初めて点数に結びつく．また，「接線」に関しては様々な言い回しがあるため，ここに挙げた代表例以外にも紹介した問題集などで練習を行い，日本語にまどわされることのない経験を積んでおこう．
また，図形と方程式の知識も合わせて確認しておきたい．

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　[1]　$C: y=x^2+2ax-a^3-2a^2=(x+a)^2-a^3-3a^2$

(1)　頂点 P の座標は　$(\boldsymbol{-a},\ -a^3-\boldsymbol{3}a^2)$

$x=-a$，$y=-a^3-3a^2$ とおくと　$a=-x$ より　$y=-(-x)^3-3(-x)^2=x^3-3x^2$

よって，点 P は a の値によらず　$y=x^3-\boldsymbol{3}x^2$　のグラフ上にある．

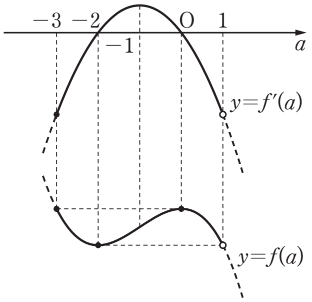
(2)　$f(a)=-a^3-3a^2=-a^2(a+3)$　とおくと

$f'(a)=-3a^2-6a=-3a(a+2)$

$-3 \leqq a<1$ のとき

$f(a)$ が最大となるのは　$a=0,\ -3$　のとき

$f(a)$ が最小となるのは　$a=-2$　のときである．



[2]　$f(x)=2x^3-3x^2+x$

$f'(x)=6x^2-6x+1$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ のとき　$f'(x)=0$ となり，$x=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}-\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{6}}$ で $f(x)$ は極大をとる．

ここで　$f(x)\div f'(x)$ を計算することにより

$$f(x)=\left(\frac{1}{\boldsymbol{3}}x-\frac{1}{6}\right)\cdot f'(x)-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$$

よって，$f(x)$ の極大値は

$$f\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{1}{6}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{18}}$$

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{3}x-\frac{1}{6} \\ 6x^2-6x+1 \,\big) & 2x^3-3x^2+\quad x \\ & 2x^3-2x^2+\frac{1}{3}x \\ \hline & \quad -x^2+\frac{2}{3}x \\ & \quad -x^2+\quad x-\frac{1}{6} \\ \hline & \qquad -\frac{1}{3}x+\frac{1}{6} \end{array}$$

2　(1)　$y'=6x^2-3$ より　$x=a$ における C の接線の傾きは　$6a^2-3$

よって，求める接線の方程式は　$y=(6a^2-3)(x-a)+2a^3-3a$

ゆえに　$y=(\boldsymbol{6}a^2-\boldsymbol{3})x-\boldsymbol{4}a^3$

(2)　(1)の方程式が $(1,\ b)$ を通るとき　$b=6a^2-3-4a^3$

ゆえに　$b=\boldsymbol{-4}a^3+\boldsymbol{6}a^2-\boldsymbol{3}$　……①

(3)　$(1,\ b)$ を通る C の接線が 3 本存在するのは，①を満たす異なる a が 3 個存在するとき．

$f(a)=-4a^3+6a^2-3$ とおくと

$f'(a)=-12a^2+12a=-12a(a-1)$

$f(0)=-3$　　$f(1)=-1$

よって，求める b の範囲は　$\boldsymbol{-3<b<-1}$

3 ［1］　C：$f(x)=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}$　より　$f'(x)=x^2-2x$

$x=t$ における C の接線の方程式は　$y=(t^2-2t)(x-t)+\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{4}{3}$

よって　$y=(t^2-\mathbf{2}t)x-\mathbf{\frac{2}{3}}t^3+t^2+\mathbf{\frac{4}{3}}$

これと，C の共有点の x 座標は　$\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}=(t^2-2t)x-\frac{2}{3}t^3+t^2+\frac{4}{3}$ より

$x^3-3x^2-(3t^2-6t)x+2t^3-3t^2=0$

$(x-t)^2(x+2t-3)=0$　　よって　$x=t$，$\mathbf{-2}t\mathbf{+3}$

C と 1 点のみ共有するのは　$t=-2t+3$　　つまり　$t=\mathbf{1}$　のときである．

［2］　$C:y=f(x)=x^3-3x$　　$l:y=px+q$

(1)　$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

よって　$x=\mathbf{-1}$ で極大値 $f(-1)=\mathbf{2}$，$x=\mathbf{1}$ で極小値 $f(1)=\mathbf{-2}$ をとる．

(2)　$px+q=x^3-3x$　つまり　$x^3-(p+3)x-q=0$　の解が a，a，b である．

解と係数の関係より

$a+a+b=0$　……①　　$a^2+ab+ba=-(p+3)$　……②　　$a^2b=q$　……③

①より　$b=\mathbf{-2}a$　これを②，③に代入して　$p=\mathbf{3}a^2\mathbf{-3}$，$q=\mathbf{-2}a^3$

第５講　微分法・積分法②

【CHECK & UP】

1　[1]　C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$x^2=x^2-6x+9$　より　$x=\dfrac{3}{2}$

C_2 と C_3 の交点の x 座標は

$x^2-6x+9=x^2-4x$　より　$x=\dfrac{9}{2}$

C_3 と C_1 の交点の x 座標は

$x^2=x^2-4x$　より　$x=0$

よって，グラフの概形は右下図.

求める面積は

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\{x^2-(x^2-4x)\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}\{(x^2-6x+9)-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}4xdx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}(-2x+9)dx$$

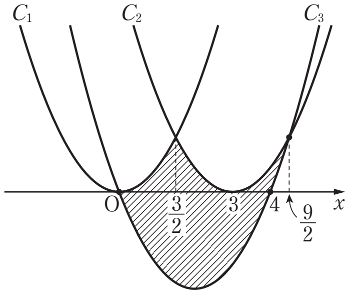
$$=\Big[2x^2\Big]_0^{\frac{3}{2}}+\Big[-x^2+9x\Big]_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}$$

$$=\frac{9}{2}+\left\{-\left(\frac{81}{4}-\frac{9}{4}\right)+9\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{9}{2}-18+27=\mathbf{\frac{27}{2}}$$

面積を出す単問練習．交点およびそれぞれのグラフの形をもとに「上下関係」の概形を描き，∫で面積を求める．まずは連立して交点，といいたいところだが，それぞれの式が因数分解できる場合は「x 軸との交点」がわかる．今回の３グラフは全てわかり，かつ C_1 と C_2 は x 軸に接している．よって概形は交点を求めずともわかる設定である．こうした「x 軸との関わり合い」が薄ければ「交点の y 座標」，または放物線ならば「頂点」などで上下関係がわかる．グラフの数が増えたときに意識したい．実際の入試では流れの中で交点が出ていたり，そもそも交点から直線や曲線を作っていたりする場合もある．今回の問題は後に挙げる「面積公式」を使うと逆に煩雑となる．公式を運用する前に，この程度の∫であれば余裕で計算できる確固たる計算力を身につけておくこと．

代入して引き算を「項ごとに」.



[2]　C と D の交点の x 座標は　$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x$

$3x^2-7x=0$　　よって　$x=0,\ \dfrac{7}{3}$

求める面積は

$$\int_{-1}^{0}\{(-x^3+9x^2)-(-x^3+6x^2+7x)\}dx$$

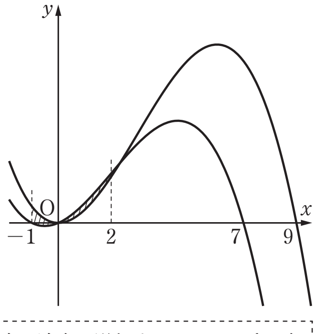
$$+\int_0^2\{(-x^3+6x^2+7x)-(-x^3+9x^2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)dx+\int_0^2(-3x^2+7x)dx$$

$$=\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=-\left(-1-\frac{7}{2}\right)-(8-14)=\mathbf{\frac{21}{2}}$$

３次関数の積分はセンター試験の範囲外であるが，このように「３次の係数が同じ２つの３次関数」であれば引き算で x^3 の項が消えるため範囲内．今回も x 軸との交点が補助となる．



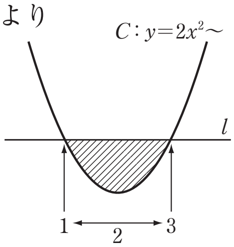
２グラフの上下が変域内の途中で逆転する．よって∫の中が±逆になる．しかしながら，マイナスは∫の外に出せるので，実際の積分計算は１回で済む．また，積分範囲の片方が「0」なので，通常の∫の計算では無視できる．とにかく「マイナス」に細心の注意を払うこと．計算が苦手ならマイナスの瞬間はスピードダウンさせること.

2 ［1］ C と l の交点は $2x^2-8x+7=1$ より

$x^2-4x+3=0$　　$x=1,\ 3$

よって求める面積は

$\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2^3=\mathbf{\frac{8}{3}}$

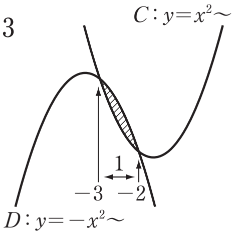


［2］ C と D の交点は　$x^2+12=-x^2-10x$ より

$x^2+5x+6=0$　　$x=-2,\ -3$

よって求める面積は

$\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1^3=\mathbf{\frac{1}{3}}$



［3］ C と l の交点は　$x^2=ax$ より

$x^2-ax=0$　　$x=0,\ a$

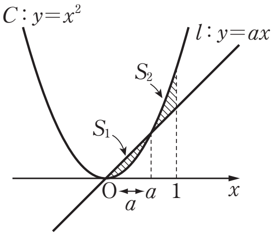
$0<a<1$ より，求める面積は

$$S_1+S_2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot a^3+\int_a^1 (x^2-ax)dx$$

$$=\frac{1}{6}a^3+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

$$=\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)$$

$$=\mathbf{\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}}$$



いわゆる「$\frac{1}{6}$ 公式」である．

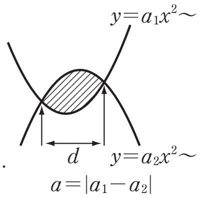
- ２グラフで「囲まれている」
- 上のグラフの式から下のグラフの式を引き算したものが「２次式」のとき，
- 引き算したあとの x^2 の係数を a
- ２交点の距離を d

とすると，２グラフで囲まれた部分の面積は

$\frac{1}{6}\cdot a\cdot d^3$

である．

a がマイナスのときはプラスにすること．



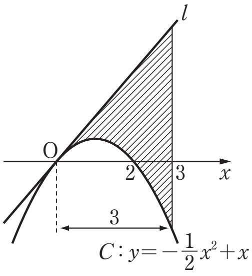
- 放物線と直線（斜めでも真横でもよい）
- 放物線と放物線（凸方向は問わず）
- ３次の係数が同じ２つの３次関数で「囲まれた部分」の面積

はこの公式．特に直線が絡む場合，「直線の式」は面積には全く無関係である．たとえ直線の式が出ていなくても面積は出すことができる．

近年は出題が減少しているが未だに現役の公式である．また，面積を求める図形の「一部」に使える場合もある．

3 ［1］ 図より求める面積は

$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 3^3=\mathbf{\frac{9}{2}}$



［2］ C_1 と C_2 の交点は

$-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}=-x^2-4x$

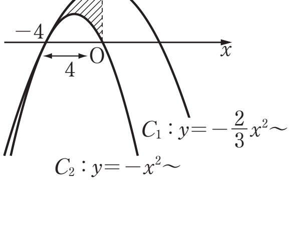
$x^2+8x+16=0$　　$x=-4$

よって，C_1 と C_2 は

この点において接する．

図より求める面積は

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4^3=\mathbf{\frac{64}{9}}$



いわゆる「$\frac{1}{3}$ 公式」である．

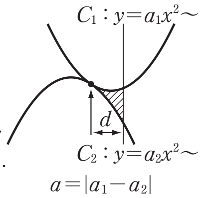
- ２グラフが「接する」
- 「接点が面積を求める変域内」
- 上のグラフの式から下のグラフの式を引き算したものが「２次式」のとき，
- 引き算したあとの x^2 の係数を a
- 接点から変域の端点までの距離を d

とすると，２グラフで囲まれた部分の面積は

$\frac{1}{3}\cdot a\cdot d^3$

である．

a がマイナスのときはプラスにすること．



[3]　放物線の 2 接線の交点の x 座標は

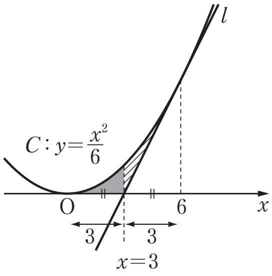
2 接点の x 座標の中点である．

よって，l と x 軸との交点の

x 座標は　$x=3$

ゆえに，求める面積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3^3\times 2=\mathbf{3}$$



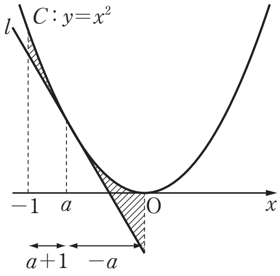
[4]　図より求める面積は

$$\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(a+1)^3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-a)^3$$

$$=\frac{1}{3}(a+1)^3-\frac{1}{3}a^3$$

$$=\frac{1}{3}(a^3+3a^2+3a+1)-\frac{1}{3}a^3$$

$$=\boldsymbol{a^2+a+\frac{1}{3}}$$



この公式は
・放物線と接線
（斜めでも真横でもよい）
・放物線と放物線が接する
（凸方向は問わず）
において多用される．特に「接線」が絡む場合，「接線の式」は面積には全く無関係である．センター試験の流れ上少ないが，たとえ接線の式が出ていなくても面積は出すことができる．
この公式はセンター試験では頻出である．特に放物線が「x 軸と接する」とき，「接線という言葉がない」ため気づきにくい．
また万が一「接点が端点でない」ときには，「接点で区切る」ことで公式が使える．特に２接線と放物線で囲まれた部分の面積に使える「$\frac{1}{12}$ 公式」はこれを元に作成できる．よって今この公式を知らない人がこれから覚えるべき公式ではないので紹介はしない．

積分＝面積ではないが，センター試験では面積の問題は頻出である．微分に比べて圧倒的に時間がかかる中で，公式を使える場面を逃すと致命的であることは言うまでもない．ただし公式に頼るのではなく，上記のように∫を正確に出す計算力があっての公式である．また，なぜ公式で面積が出せるのかについては割愛するが，興味がある人は「大学への数学 1：1 の対応 数学Ⅱ」（東京出版）の「積分」のページを一読するとよいであろう．

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　$t^3-3t-2=0$ より　$(t+1)^2(t-2)=0$　　$t=\mathbf{-1,\ 2}$

$C:y=\frac{1}{2}x^2-1$　　$y'=x$

$x=t$ における接線の傾きは t，法線の傾きは $-\frac{1}{t}$

よって法線の方程式は　$y=-\frac{1}{t}(x-t)+\frac{1}{2}t^2-1=-\frac{1}{t}x+\frac{1}{2}t^2$

$t=-1$ のとき　$m_1:y=x+\frac{1}{2}$　　$t=2$ のとき　$m_2:y=-\frac{1}{2}x+2$

m_1 と m_2 の交点Pの x 座標は　$x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x+2$　　$x=1$　　よって　$\mathrm{P}\left(\mathbf{1},\ \mathbf{\frac{3}{2}}\right)$

C と m_1 の交点は　$\frac{1}{2}x^2-1=x+\frac{1}{2}$　　$x^2-2x-3=0$　　$x=-1,\ 3$

よって，Qの x 座標は **3** である．

C と m_2 の交点は　$\frac{1}{2}x^2-1=-\frac{1}{2}x+2$　　$x^2+x-6=0$　　$x=2,\ -3$

よって，Rの x 座標は **−3** である．

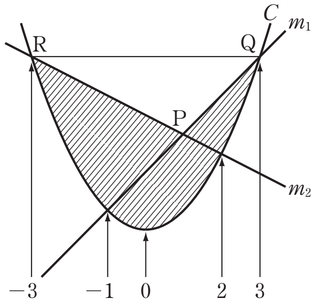
求める面積は

(弓形RQ)−(三角形RPQ)

$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot6^3-\frac{1}{2}\cdot6\cdot2$

$=18-6$

$=\mathbf{12}$



2　[1]　$\mathrm{A}\left(1+\frac{a}{2},\ 3a-\frac{5}{2}a^2\right)$ より　$x=1+\frac{a}{2}$，$y=3a-\frac{5}{2}a^2$　とすると

$a=2x-2$　これと　$0<a<\frac{2}{3}$ より　$0<2x-2<\frac{2}{3}$　　$1<x<\frac{4}{3}$

$y=3(2x-2)-\frac{5}{2}(2x-2)^2=-10x^2+\mathbf{26}x\mathbf{-16}$

よって，求める点Aの軌跡は　放物線 $D:y=-10x^2+26x-16$　の $1<x<\mathbf{\frac{4}{3}}$ の部分.

$C:y=-x^2+2x$　　グラフは上に凸，軸は $x=1$

C と D の共有点は　$-x^2+2x=-10x^2+26x-16$　　$(3x-4)^2=0$　　$x=\frac{4}{3}$

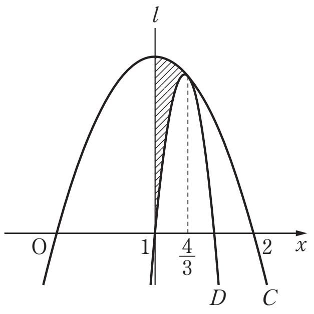
よって C と D は $x=\dfrac{4}{3}$ で接する.

ゆえに求める面積は

$$\int_1^{\frac{4}{3}}\{(-x^2+2x)-(-10x^2+26x-16)\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{4}{3}}9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2dx$$

$$=\left[9\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)^3\right]_1^{\frac{4}{3}}=0-3\left(-\frac{1}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{9}}$$



[2]　(1)　$C_1:(x-\boldsymbol{a})^2+(y-\mathbf{1})^2=\mathbf{1}$

(2)　$C_2:y=\dfrac{1}{2}x^2$ より $y'=x$

$x=b$ における接線の傾きは $\boldsymbol{b}$，方程式は　$l:y=b(x-b)+\dfrac{1}{2}b^2=\boldsymbol{b}x-\mathbf{\dfrac{1}{2}}b^2$

$x=b$ における法線の方程式は　$m:y=-\dfrac{1}{b}(x-b)+\dfrac{1}{2}b^2=-\mathbf{\dfrac{1}{\boldsymbol{b}}}x+\mathbf{\dfrac{1}{2}}b^2+\mathbf{1}$

(3)　C_1 の中心が m 上にあるので　$1=-\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2}b^2+1$　　ゆえに　$a=\mathbf{\dfrac{1}{2}}b^3$

このとき　$C_1:\left(x-\dfrac{1}{2}b^3\right)^2+(y-1)^2=1$　　これが点 $\mathrm{P}\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$ を通るとき

$\left(b-\dfrac{1}{2}b^3\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}b^2-1\right)^2=1$　　$b^2-b^4+\dfrac{1}{4}b^6+\dfrac{1}{4}b^4-b^2+1=1$

$b^6=3b^4$　　$b\neq0$ より　$b^2=3$　　$b>0$ より　$b=\sqrt{\mathbf{3}}$

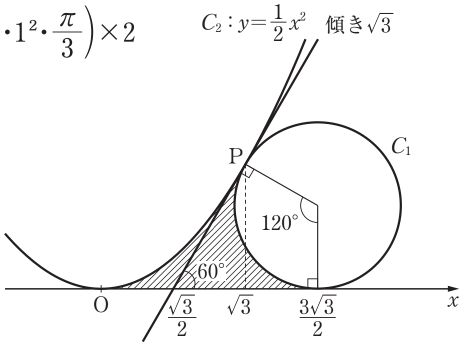
このとき　$a=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{2}$ であり，l と x 軸とのなす角は $\mathbf{60}°$ である.

求める面積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\times2+\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}\right)\times2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}+\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{9\sqrt{3}}{8}}-\mathbf{\frac{\pi}{3}}$$



3　$C_1: y=x^2$　　$C_2: y=x^2-4ax+4a(a+1)$　$(a>0)$

(1)　C_1 で $y'=2x$

$x=t$ における C_1 の接線の方程式は　$y=2t(x-t)+t^2=\mathbf{2}tx-t^2$

これが C_2 と接するのは　$x^2-4ax+4a(a+1)=2tx-t^2$

つまり　$x^2-2(2a+t)x+4a(a+1)+t^2=0$　……①　で判別式 $D=0$ のときである．

$$\frac{D}{4}=(2a+t)^2-4a(a+1)-t^2=0 \qquad 4a^2+4at+t^2-4a^2-4a-t^2=0$$

$$4at=4a \qquad a>0 \text{ より } \quad t=\mathbf{1}$$

このとき，①は重解　$x=2a+t=2a+1$　をもつ．

よって，直線 l の方程式は　$y=\mathbf{2}x\mathbf{-1}$，l と C_2 の接点の座標は $(\mathbf{2a+1},\ \mathbf{4a+1})$

(2)　$x^2=x^2-4ax+4a(a+1)$ より　$4ax=4a(a+1)$　　よって　$x=a+1$

したがって，C_1 と C_2 の交点の座標は　$\mathrm{P}(a+\mathbf{1},\ (a+1)^2)$　である．

点Pを通り，直線 l と平行な直線の方程式は

$$m: y=2(x-a-1)+(a+1)^2=\mathbf{2}x+a^2\mathbf{-1}$$

直線 m の y 切片が正となるのは　$a^2-1>0$ より $a>\mathbf{1}$ のときである．

$a>1$ のとき　求める面積は

$$S=\frac{1}{2}(a^2-1)(a+1)+\frac{1}{6}(a+1)^3$$

$$=\frac{1}{2}(a+1)^2(a-1)+\frac{1}{6}(a+1)^3$$

$$=\frac{1}{6}(a+1)^2\{3(a-1)+a+1\}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\boldsymbol{a}+1)^2(\mathbf{2}\boldsymbol{a}-1)$$

第６講　微分法・積分法③

【CHECK & UP】はありません.

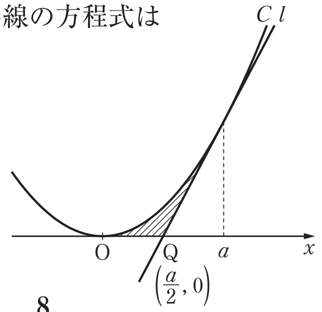
【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　$C：y=x^2$　より　$y'=2x$　　C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$y=2a(x-a)+a^2$　　よって　$l：y=\boldsymbol{2a}x-a^2$

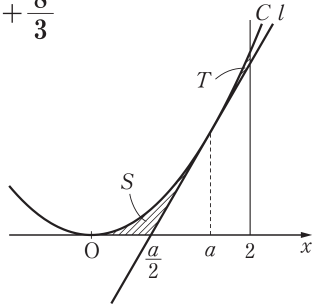
また，放物線の２接線の交点の x 座標は

２接点の x 座標の中点であるので　$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{a}{2}},\ \mathbf{0}\right)$



$a>0$ のとき　$S=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\times2=\boldsymbol{\frac{a^3}{12}}$

$a<2$ のとき　$T=\frac{1}{3}(2-a)^3=-\frac{1}{3}(a-2)^3=-\boldsymbol{\frac{1}{3}}a^3+\mathbf{2}a^2-\mathbf{4}a+\boldsymbol{\frac{8}{3}}$



$0\leqq a\leqq2$ のとき　$U=S+T$ とおく

$$U=\frac{a^3}{12}-\frac{1}{3}(a-2)^3=-\frac{1}{4}a^3+2a^2-4a+\frac{8}{3}$$

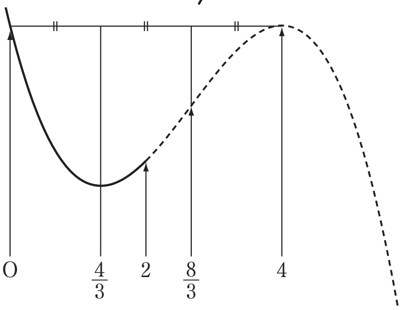
$$U'=\frac{a^2}{4}-(a-2)^2=-\frac{3}{4}a^2+4a-4=-\frac{1}{4}(a-4)(3a-4)$$

よって，グラフより　$a=\mathbf{0}$ で最大値　$\boldsymbol{\frac{8}{3}}$

$a=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$ で最小値

$$\frac{1}{12}\left(\frac{4}{3}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}-2\right)^3=\frac{16}{81}+\frac{8}{81}$$

$$=\frac{24}{81}=\boldsymbol{\frac{8}{27}}$$　をとる．



2　$C_1：f(x)=\frac{1}{8}x^2$　　$C_2：g(x)=-x^2+3ax-2a^2$　$(a>0)$　軸：$x=\frac{3}{2}a>0$

(1)　C_1 と C_2 の交点 P の x 座標は

$\frac{1}{8}x^2=-x^2+3ax-2a^2$　　$9x^2-24ax+16a^2=0$　　$(3x-4a)^2=0$　　$x=\frac{4}{3}a$（重解）

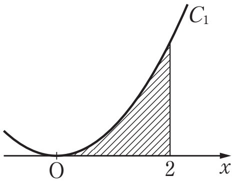
ゆえに　$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}}a,\ \boldsymbol{\frac{2}{9}}a^2\right)$

P における C_1 の接線，すなわち C_1 と C_2 の共通接線の傾きは　$f'\left(\frac{4}{3}a\right)=\frac{1}{3}a$

よって接線の方程式は　$y=\frac{1}{3}a\left(x-\frac{4}{3}a\right)+\frac{2}{9}a^2$　　ゆえに　$y=\boldsymbol{\frac{1}{3}}ax-\boldsymbol{\frac{2}{9}}a^2$

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は

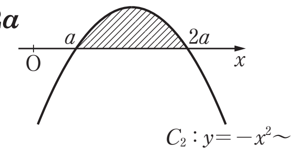
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot2^3=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$　（$=S$ とする）



$C_2: y=-(x-a)(x-2a)$　と x 軸の交点の x 座標は　$x=\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{2a}$

よって，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot a^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}}a^3\quad (=T\text{ とする})$$



(3)　$2a\leqq 2$　つまり　$0<a\leqq\boldsymbol{1}$ のとき　$S(a)=S-T=-\dfrac{1}{6}a^3+\dfrac{1}{3}$

$1<a\leqq\boldsymbol{2}$ のとき

$$S(a)=S-\int_a^2(-x^2+3ax-2a^2)dx$$

$$=\frac{1}{3}-\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3a}{2}x^2-2a^2x\right]_a^2$$

$$=\frac{1}{3}-\left(-\frac{8}{3}+6a-4a^2+\frac{a^3}{3}-\frac{3}{2}a^3+2a^3\right)$$

$$=-\boldsymbol{\frac{5}{6}}a^3+\boldsymbol{4}a^2-\boldsymbol{6}a+\boldsymbol{3}$$

$2<a$ のとき　$S(a)=S=\dfrac{1}{3}$

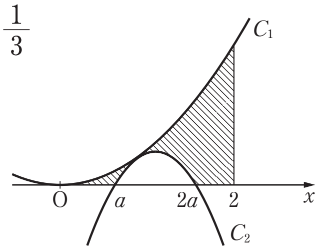
$S(a)$ は $0<a\leqq 1$ のとき単調減少，$2<a$ のとき定数

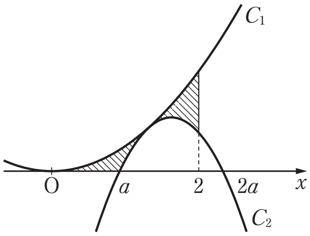
$1<a\leqq 2$ のとき

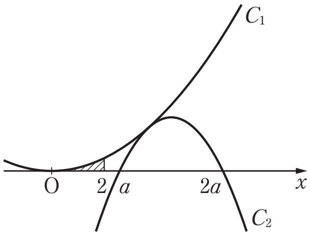
$$S'(a)=-\frac{5}{2}a^2+8a-6=-\frac{1}{2}(5a^2-16a+12)$$

$$=-\frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

よって　$a=\boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$ のとき　最小値　$\boldsymbol{\dfrac{3}{25}}$







3　Q は線分 AP の中点より　$u=\dfrac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{2}}$，$v=\dfrac{\boldsymbol{y-2}}{\boldsymbol{2}}$　が成り立つ．

Q が C 上の点であるとき，$v=2u^2$　これに上の結果を代入して

$$\frac{y-2}{2}=2\cdot\frac{(x+1)^2}{4}\qquad y=(x+1)^2+2$$

よって，点 P は放物線 $D: y=x^2+\boldsymbol{2}x+\boldsymbol{3}$ 上にある．

C と D の交点の x 座標は　$2x^2=x^2+2x+3$　　$x^2-2x-3=0$　$x=\boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{3}$

よって，点 R の x 座標は -1，点 S の x 座標は 3 である．

D で $y'=2x+2$ より　点 R における D の接線の方程式は　$y=\boldsymbol{2}$　であり，

点 S における D の接線の方程式は $y=8(x-3)+18$　つまり　$y=\boldsymbol{8}x-\boldsymbol{6}$　である．

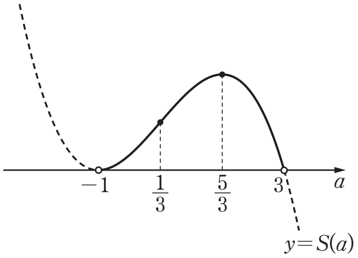
P が放物線 D 上の点 $(a,\ a^2+2a+3)$ にあるときを考える．

$-1<a<3$ のとき

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{PH}\cdot(a+1)=\frac{1}{2}(-a^2+2a+3)(a+1)$$

$$=-\frac{1}{2}(a+1)^2(a-3)$$

$$=\frac{1}{\mathbf{2}}(-a^3+a^2+\mathbf{5}a+\mathbf{3})$$



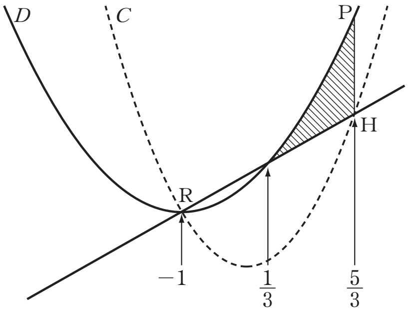
グラフより　$a=\mathbf{\frac{5}{3}}$ のとき最大値をとる.

$a=\frac{5}{3}$ のとき　$\mathrm{H}\left(\frac{5}{3},\ \frac{50}{9}\right)$ より　HR：$y=\dfrac{\frac{50}{9}-2}{\frac{5}{3}-(-1)}(x+1)+2=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$

これと，D の交点の x 座標は　$x^2+2x+3=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$　　$x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

この方程式の１解が -1 より，もう１解は　$x=\mathbf{\frac{1}{3}}$

したがって，求める面積は



$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{(x^2+2x+3)-\left(\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{125}{27}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{25}{9}-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{124}{27}+\frac{72}{27}-\frac{36}{27}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{160}{81}}$$

※ $$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}\right\}\left(x-\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$=\frac{64}{81}+\frac{96}{81}=\mathbf{\frac{160}{81}}$$

第７講　数列①

【CHECK & UP】

1

[1]　(1)　条件(A)：$a_3+a_5+a_7=93$　より

$(a+2d)+(a+4d)+(a+6d)=93$

$a=-4d+31$　……①

条件(B)より　$a_{14}<100$　かつ　$a_{15}>100$

つまり　$a+13d<100$　かつ　$a+14d>100$

①を代入して　$10d>69$　かつ　$9d<69$

これを満たす整数 d は $d=\mathbf{7}$ のみ

このとき①より　$a=\mathbf{3}$

> 初項 a，公差 d の等差数列は
> ・$a_n=a+(n-1)d$　(n の１次式)
> ・$a_1=a$，$a_{n+1}-a_n=d$
> と表される．２番目は「漸化式」(後述)．
> １番目は「公式」という扱いだが，a から始まり d ずつ増加することから当然の式である．「d を加える回数」に注意．また，一般項は「n の１次式」すなわち単調増加または単調減少である．このため，「ある n で項の値が一定のラインを越える」ことがモチーフとなることがある．今回は $n=15$ で初めて 100 のラインを越える，すなわち $n=14$（まで）では越えていない．

(2)　(1)より　$a_n=3+(n-1)\cdot7=7n-4$

$\sum_{i=1}^{n}a_i$ は等差数列 a_n の a_1 から a_n までの和である．

よって　$\dfrac{n\{3+(7n-4)\}}{2}>715$　　$n(7n-1)>1430$

ここで，$n(7n-1)$ を $7n^2$ とみなすと　$7n^2>1430$

$n^2>204.\cdots$　　よって　$n=14$ まで不適．

$15(7\cdot15-1)=1560$　より　$n=15$ は適する．

ゆえに　$n=\mathbf{15}$

> Σ の計算をした人はいないだろうか？
> 「等差数列の和」であり，「公式」
> $\dfrac{\text{項数(たしはじめの項＋たしおわりの項)}}{2}$
> が存在する．
> 等差数列の「和の最大・最小」は，一般項が「0 ライン」を越えるまでというお約束であるが，「ある値より上（下）」は，まともに和を出す必要がある．ただし「２次不等式」を解くのはナンセンス．まともに解は出ないばかりか時間がかかりすぎてセンター向けではない．

[2]　(1)　$b_7=1$ より　$7p+q=1$　　$q=1-7p$　……①

また，$\{b_n\}$ は等差数列であるから

$S_{12}=10$　より　$\dfrac{12(b_1+b_{12})}{2}=10$

$3\{(p+q)+(12p+q)\}=5$　　これに①を代入して

$3(-p+2)=5$　　$\boldsymbol{p=\dfrac{1}{3}}$　　このとき　$\boldsymbol{q=-\dfrac{4}{3}}$

(2)　$b_n=\dfrac{1}{3}n-\dfrac{4}{3}$ より　$S_n=\dfrac{n\left(-1+\dfrac{1}{3}n-\dfrac{4}{3}\right)}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}n(n-7)}$

(3)　$\sum_{k=1}^{12}S_k=\dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{12}(k^2-7k)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{6}\cdot12\cdot13\cdot25-7\cdot\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot13\right)$

$=\dfrac{1}{6}(2\cdot13\cdot25-7\cdot6\cdot13)=\dfrac{13}{3}(25-7\cdot3)=\boldsymbol{\dfrac{52}{3}}$

> 上記の通り，n の１次式，すなわち「等差数列」である．よって「和の公式」が使える．
> (2)でわかるように，等差数列の和は「n の２次式かつ定数項が 0」である．知っておいてよいだろう．
> (3)は「和の和」である．もとが n の２次式であるため，「Σ の公式」が登場する．ついでに１次式の部分も Σ の公式を利用した．
> センター数学の数列は，時にこのような「数値計算」が要求されるため，折れることなく計算したい．とはいっても，気合いだけで計算するのではない．まずは Σ の前にくくり出す．計算途中で約分し，共通因数をくくり出す．
> 計算に長けている人には無用のアドヴァイスであろうが．

2

［1］ (1) 初項 18，公比 $-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より $\boldsymbol{a_n=18\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}}$

よって　$a_6=18\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^5=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

(2) 求める和は，初項 $a_3=6$，公比 $\dfrac{1}{3}$，項数 6 の等比数列の和である．よって

$$\frac{6\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\cdot 6\cdot\left(1-\frac{1}{729}\right)=\boldsymbol{\frac{728}{81}}$$

> 初項 a，公比 r の等比数列は
> ・$a_n=a\cdot r^{n-1}$
> ・$a_1=a$，$a_{n+1}=r\cdot a_n$
> と表される．一般項は「指数関数」の形であるが，r にマイナス（や 0）が許されるところが指数関数と異なる．r がプラスであれば，単調増加または減少である．
> 等差数列・等比数列に共通しているのは，「等間隔に間引いても等差・等比」であること．$a_1=18$，$a_3=6$ であるから，奇数番目の項は「公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列」．

> 等比数列の和の公式は，公比≠1 のとき
> $$\frac{\text{たしはじめ}\cdot\{1-(\text{公比})^{\text{項数}}\}}{1-(\text{公比})}=\frac{\text{たしはじめ}\cdot\{(\text{公比})^{\text{項数}}-1\}}{(\text{公比})-1}$$ である

［2］ (1) 等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると

$a_2=-\dfrac{1}{2}a_1$　より　$r=-\dfrac{1}{2}$

また　$a_1+a_2+a_3=\dfrac{9}{4}$ より　$a-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}a=\dfrac{9}{4}$

$a=3$　　よって　$a_n=3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_4+a_5+a_6=\dfrac{-\frac{3}{8}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{8}=\boldsymbol{-\dfrac{9}{32}}$

> 「等比数列」とわかっているからこそ，a_1 と a_2 の漸化式だけで公比がわかる．本格的な漸化式は次の講で扱う．
> $a_4+a_5+a_6=r^3(a_1+a_2+a_3)$ であるから，初項 a がわからなくても(1)の答えは出せる．ここでは「等比数列の和の公式の練習」を想定した解答となっている．

(2) 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{r}=-2$ の等比数列．

よって，初項から第 n 項までの和は　$\dfrac{\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$

これが 57 であることより　$\dfrac{\{1-(-2)^n\}}{9}=57$

$(-2)^n=-512$　　ゆえに　$n=\boldsymbol{9}$

> さらに等比数列は，「逆数にしても等比数列」である．よってその一般項も和も出すことができる．
> 「逆数」にするシーンは，この等比数列以外にも後述の「部分分数分解」による和のときにも見られる．

3 (1)　$a_1=S_1=2\cdot1^2+5\cdot1=7$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2n^2+5n)-\{2(n-1)^2+5(n-1)\}\\&=(2n^2+5n)-(2n^2-4n+2+5n-5)\\&=4n+3\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=4n+3}$

和（に関する式）が与えられていてそこから一般項を出す典型問題である.
第 n 項までの和から，その１項前までの和を引けば第 n 項が出るという，これまた当然の知識を利用するだけである．単純にこれだけで一般項が出る問題の出題はセンター試験においては多くはないが,「引き算」により目的のものを出すという工程は，式に「操作」を加えてから行うものや漸化式の形式のものなど，センター試験でも頻出の知識である.
また,「累乗」がからむ場合は，センター試験の解答が要求している形にまとめる必要がある．(2)で確認しておこう.
なお，このパターンは「初項」が出ていないので $n=1$ のときの項をまず最初に求めるくせをつけよう．あとからあわてふためくことのないように.
ちなみに「$n\geqq2$ のときの式が $n=1$ でも成立する」ものがセンター試験では圧倒的である．なぜならばマーク式のため，成立しないときは答えさせるときに「ばればれ」だからである．よって試験本番は「スルーする」こともできる．ただし,「一般項を介さず」和を求めさせるときもある．その場合は，$n\geqq2$ のときが「等差数列でも等比数列でもない」，つまり第２項から直接和を出すことができない場合は，第１項から目的の項までの和を求め，そこから第１項を除き，その後に真の初項を加えるといった丁寧な作業が必要となる.

(2)　$a_1=S_1=3^1+1=4$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=3^n+1-(3^{n-1}+1)\\&=3^n-3^{n-1}\\&=3\cdot3^{n-1}-1\cdot3^{n-1}\\&=(3-1)\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときには成り立たない.

ゆえに　$n\geqq2$ のとき　$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$,　$\boldsymbol{a_1=4}$

数列においては,「公式は覚えたけどセンター形式では点数がとれない」という人が後を絶たない．まずその「公式」の「意味」と「正確な運用法」が本当に身についているであろうか．うろ覚えは論外であるが，そうでなくとも公式を文字で丸暗記しているようではお話にならない．繰り返すようだが「時間制限」が非常にきつい試験であるがゆえに, 選ぶことができる選択肢は決して多くはない．特に「等差数列」「等比数列」は特別な数列であるため，特有の解法が数多く存在する．それも含め，基礎練習を怠ることなく学習を進めよう．その上に, 次の講の学習や色本・赤本の練習が乗ることで初めて数列攻略の道が開ける.

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1 (1) $\{x_n\}$：a，b，c，… が等差数列より　$a+c=2b$　よって　$c=2b-a$

$\{y_n\}$：c，a，b，… が等比数列より　$b\cdot c=a^2$

ゆえに　$b(2b-a)=a^2$　$2b^2-ab-a^2=0$　$(2b+a)(b-a)=0$

$a\neq b$ より　$b=\mathbf{-\frac{1}{2}}a$　$c=\mathbf{-2}a$

よって　$\{x_n\}$：a，$-\frac{1}{2}a$，$-2a$，… より　公差 $\mathbf{-\frac{3}{2}}a$

(2) $\{y_n\}$：$-2a$，a，$-\frac{1}{2}a$，… より　公比 $-\frac{1}{2}$

初項から第8項までの和は　$\dfrac{-2a\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\cdot(-2a)\cdot\left(1-\frac{1}{256}\right)=\mathbf{-\frac{85}{64}}a$

(3) $\{z_n\}$：b，c，a，…　すなわち　$\{z_n\}$：$-\frac{1}{2}a$，$-2a$，a，… の階差数列 w_n は

$\{w_n\}$：$-\frac{3}{2}a$，$3a$，…　これが等差数列であるとき，公差は $\mathbf{\frac{9}{2}}a$

よって　$w_n=-\frac{3}{2}a+(n-1)\cdot\frac{9}{2}a=\frac{9}{2}an-6a=\mathbf{\frac{9n-12}{2}}a$

$n\geqq 2$ のとき　$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}w_k=-\frac{1}{2}a+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{9k-12}{2}a=-\frac{1}{2}a+\frac{(n-1)(w_1+w_{n-1})}{2}$

$=-\frac{1}{2}a+\dfrac{(n-1)\left(-\frac{3}{2}a+\frac{9n-21}{2}a\right)}{2}=\frac{a}{4}\{-2+(n-1)(9n-24)\}$

$=\mathbf{\frac{a}{4}(9n^2-33n+22)}$　これは $n=1$ のときも成り立つ．

2 (1) $a_{n+1}=3a_n+60$　……①　$a_1=-27$

$\alpha=3\alpha+60$　……②

①，②を辺々引いて　$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$　②より　$\alpha=-30$

よって，①は　$a_{n+1}+30=3(a_n+30)$　と変形できる．また　$a_1+30=3$

したがって，数列 $\{a_n+30\}$ は初項3，公比3の等比数列である．

よって　$a_n+30=3\cdot 3^{n-1}$　ゆえに　$a_n=\mathbf{3^n-30}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3^k-30)=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-30n=\mathbf{\frac{3}{2}(3^n-1)}-30n$

$\{a_n\}$：-27，-21，-3，51，213，…… より　$S_n>0$ となる最小の n は $n=\mathbf{5}$ である．

(2) $2b_n+c_n=(n-1)d$　……③　$b_n-2c_n=x\cdot r^{n-1}$　……④

(③×2＋④)÷5　より　$b_n=\frac{1}{5}\{2(n-1)d+xr^{n-1}\}$

(③−④×2)÷5　より　$c_n=\frac{1}{5}\{(n-1)d-2xr^{n-1}\}$

ゆえに　$b_n+c_n=\mathbf{\frac{3}{5}}d(n-1)-\mathbf{\frac{1}{5}}xr^{n-1}$

(3)　数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列が a_n より　$(b_{n+1}+c_{n+1})-(b_n+c_n)=a_n$

よって　$a_n=\left(\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}xr^n\right)-\left\{\frac{3}{5}d(n-1)-\frac{1}{5}xr^{n-1}\right\}$

$=\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}xr\cdot r^{n-1}-\frac{3}{5}dn+\frac{3}{5}d+\frac{1}{5}xr^{n-1}=\frac{3}{5}d+\frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1}$

また，(1)より　$a_n=-30+3\cdot 3^{n-1}$ であるから，係数比較して

$\frac{3}{5}d=-30$，$r=3$，$\frac{1}{5}x(1-r)=3$　　ゆえに　$r=\mathbf{3}$，$x=-\mathbf{\frac{15}{2}}$，$d=\mathbf{-50}$

したがって　$b_n=-\mathbf{\frac{3^n}{2}}-\mathbf{20}(n-1)$　　$c_n=\mathbf{3}^n-\mathbf{10}(n-1)$

3　(1)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=-n^2+24n$　　$a_1=S_1=-1+24=\mathbf{23}$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(-n^2+24n)-\{-(n-1)^2+24(n-1)\}$

$=-2n+25$　($n=1$ のときも成立)

よって　$a_2=\mathbf{21}$

また，$a_n<0$　つまり　$-2n+25<0$ となるのは　$n>\frac{25}{2}$ より　$n\geqq\mathbf{13}$

$\sum_{k=1}^{40}|a_k|=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{40}(-a_k)=S_{12}-(S_{40}-S_{12})=2S_{12}-S_{40}$

$=2(-144+288)-(-1600+960)=\mathbf{928}$

※　$\sum_{k=1}^{12}a_k-\sum_{k=13}^{40}a_k=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}-\frac{28(a_{13}+a_{40})}{2}$

$=6(23+1)-14(-1-55)=144+784=928$

(2)　$b_n=1\cdot 3^{n-1}$　　$\{b_n\}$：1，3，9，27，…

(i)　$b_k\leqq 10<b_{k+1}$ を満たす b_k が c_{10} である．$b_3=9$，$b_4=27$ より　$c_{10}=b_3=\mathbf{9}$

$c_n=27$　すなわち　$c_n=b_4$ より　$b_4\leqq n<b_5$

すなわち　$b_4\leqq n\leqq b_5-1$ となる自然数 n の個数は $27\leqq n\leqq 80$ の $80-27+1=\mathbf{54}$ 個ある．

(ii)　$c_n=b_1=1$ となる n は　$b_1\leqq n\leqq b_2-1$　すなわち　$1\leqq n\leqq 2$ の 2 個である．

$c_n=b_2=3$ となる n は　$b_2\leqq n\leqq b_3-1$　すなわち　$3\leqq n\leqq 8$ の $8-3+1=6$ 個である．

$c_n=b_3=9$ となる n は　$b_3\leqq n\leqq b_4-1$　すなわち　$9\leqq n\leqq 26$ の $26-9+1=18$ 個である．

ゆえに　$\sum_{k=1}^{30}c_k=1\times 2+3\times 6+9\times 18+27\times 4=\mathbf{290}$　である．

第８講　数列②

【CHECK & UP】

1 (1) $a_4=54$ より　$a\cdot r^3=54$

r は１より大きい整数であり

$r=2$ のとき　$8a=54$　これを満たす整数 a はなく不適.

$r=3$ のとき　$27a=54$　よって　$a=2$　これは適する.

$r\geqq4$ のとき　$a\cdot r^3\geqq64a\geqq64>54$ より不適.

よって　$\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{r=3}$ に限られる.

> これがセンター試験の出題であればお話にならないくらい簡単な問題となる. なぜならば求める整数 a および r の「桁数」や, 解の個数がわかってしまう. もし１組しかないならばそれを「発見した」時点で, 他に解が存在するか否かの検証もせず終了して次の問題に行くことができてしまうからだ. いい意味でそれを「利用」しよう.

(2) $a_n=2\cdot3^{n-1}$ より

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2k\cdot3^{k-1}=2\cdot3^0+4\cdot3^1+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot3^{n-2}+2n\cdot3^{n-1}$$

$$3S_n=2\cdot3^1+4\cdot3^2+6\cdot3^3+\cdots\cdots\cdots+2(n-1)\cdot3^{n-1}+2n\cdot3^n$$

$$S_n-3S_n=2+(2\cdot3^1+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1})-2n\cdot3^n$$

$$-2S_n=2+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}-2n\cdot3^n$$

$$=2+3^n-3-2n\cdot3^n=(1-2n)\cdot3^n-1$$

ゆえに　$S_n=\boldsymbol{\dfrac{(2n-1)\cdot3^n+1}{2}}$

> 等差数列×等比数列に代表される「公比をかけてずらしたものを作って引く」という典型問題. レベルとしては教科書の域を出ないが, 途中の「等比数列の和」の項数が「$n-1$ 項」であり, それとは別に単独の２項が余ることに注意. 最初の項は等比数列の和に入れることができる問題が多い. 原理は知っておく必要があるが, センター試験の誘導がこのような典型的な解法とは限らない.

2 (1) 第 n 群の末項は数列 $\{a_n\}$ の第　$1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$　項である.

よって, 第 19 群の末項は数列 $\{a_n\}$ の第 $\dfrac{19\cdot20}{2}=190$ 項.

ゆえに, 第 20 群の初項は数列 $\{a_n\}$ の第 **191** 項.

(2) a_{205} が第 n 群に属するとすると,

$$\frac{(n-1)n}{2}<205\leqq\frac{n(n+1)}{2}$$

$$(n-1)n<410\leqq n(n+1)$$

$19\cdot20=380$, $20\cdot21=420$ より, これを満たす整数 n は $n=20$.

(1)より第 19 群までに 190 項ある.

よって a_{205} は第 20 群の 15 番目の数.

第 n 群に属する項の総和は $n\cdot n=n^2$ である.

ゆえに　$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{205}=\displaystyle\sum_{k=1}^{19}k^2+20\cdot15=\frac{1}{6}\cdot19\cdot20\cdot39+300=\boldsymbol{2770}$

> 同じく典型問題「群数列」. もとの数列が n の式（等差や等比など）で表せる場合と, ある規則性をもった数字の羅列である場合に分かれるが, いずれにしても「第 n 群の末項」が「元の数列の何番目か」が焦点となる. それは「第 n 群までの項数の和」である. つまりまずは「数列の和」の計算から始まるのである. それにより, 第 n 群の初項が元の数列の何番目かがわかり, これにて「第 n 群の初項, 末項, 項数」が明らかとなる. また, 元の数列の和を求める場合も,「群ごとの和」を求め, それを目的の群まで「Σ」で計算するといった問題も有名. しかしながら, これらも典型的な誘導がついた場合である. 異なった誘導がついた場合はその限りではない.

3 [1] (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 $-\frac{1}{2}$ の等差数列である．

よって　$\boldsymbol{a_n}=1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}}$

(2) $a_{n+1}=-1\cdot a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公比 -1 の等比数列である．よって　$\boldsymbol{a_n=3\cdot(-1)^{n-1}}$

(3) $a_{n+1}=-3a_n+8$　……①　　$\alpha=-3\alpha+8$　……②

①−② より　$a_{n+1}-\alpha=-3(a_n-\alpha)$

また，②より $\alpha=2$　したがって

①は　$a_{n+1}-2=-3(a_n-2)$　と変形できる．

また，$a_1-2=2$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は初項 2，公比 -3 の等比数列である．ゆえに　$a_n-2=2\cdot(-3)^{n-1}$

したがって　$\boldsymbol{a_n=2\cdot(-3)^{n-1}+2}$

> ある２項（以上）の関係を表した式が「漸化式」．項を羅列せずとも，また「○○数列」と表現しなくとも，その式を見れば増え方がわかる．その中でも「等差数列型」「等比数列型」「階差数列型」は基本であり，式を見たら誘導がなくとも即反応をし，一般項を求められるようになっていなければならない．
> 新課程になり，この３つに「特性方程式型」が加わった．置き換えなどをしている余裕はない．実際には左の解答の内，日本語の部分を除いたものが本番に必要なものとなるであろう．

[2] (1) $a_{n+1}=a_n+(2n+3)$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は

$b_n=2n+3$　　よって　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)$$

$$=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)=n^2+2n$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ．　ゆえに　$\boldsymbol{a_n=n(n+2)}$

> 「階差数列」である．「和から一般項」のときと同様，「$n\geqq 2$ のとき」「$n=1$ のときも成立」はセンター試験においては不必要なことも少なくない．もちろん，「計算ミス」を防ぐという意味も含め，確認をしておくにこしたことはない．

(2)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{3n^2+9n+6-2n-4-2n-2}{4(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}}$$

> 「部分分数分解」である．このタイプは，分母が 2 項の「積」の形で因数分解されているとき，そのそれぞれを分母にもつ２つの分数の「差」で表せるものが出題される．センター試験では，分母の因数の差が 1 または 2 のものにほぼ限定され，かつ誘導がつくことが多い．特に「どの項が相殺されるのか」がわかれば，左のように項を羅列する必要もなく，消えずに残る項のみを記述できる．
> 最後の形は「通分」が基本．

[3] (1) $c_{n+1}=-c_n+n^2+3$ より

$c_{n+2}=-c_{n+1}+(n+1)^2+3$

$\quad=-\{-c_n+n^2+3\}+n^2+2n+4$

ゆえに　$\boldsymbol{c_{n+2}=c_n+2n+1}$

> 漸化式は見ただけで解けるものばかりではない．誘導に乗ることで何をさせたいかが自ずと見えるようになっている．今回は「１つおき」に「階差数列型」漸化式となっている．

(2)　(1)の結果より　$c_{n+2}-c_n=2n+1$

$n=23$ のとき　$c_{25}-c_{23}=2\cdot23+1=\mathbf{47}$

$n=21$ のとき　$c_{23}-c_{21}=2\cdot21+1=43$

$n=19$ のとき　$c_{21}-c_{19}=2\cdot19+1=39$

⋮

$n=1$ のとき　$c_3-c_1=2\cdot1+1=3$

これらを辺々加えると

$c_{25}-c_1$ は，初項が 3，公差が 4，項数が 12 の等差数列の和であるから

$$c_{25}-c_1=\frac{12(3+47)}{2}=300$$

$c_1=2$ より　$c_{25}=\mathbf{302}$

講義でもふれるが，操作を加えた後，具体的に項を列挙したりずらしたりし，その後「引く」ことで目的のものを作る(残す)という誘導がセンター試験では散見される．

近年のセンター試験の数列は，数学Ⅰの時代のものとは異なり，基本問題および基本的な解法だけで乗り切るのは厳しい問題が少なくない．知識は基本的なものばかりであるが，それをどう使うかに関して，誘導に乗り理解しながら時間内に進めるためには，基本事項の「理解」が必要である．「公式（と呼ばれているだけのものも含む)」を確実に理解し，いざというときに適切に運用できるよう，近年の過去問や模試を含め数多くの問題にふれ，誘導形式に慣れておこう．

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1 (1)　$a_{n+1}=-2a_n+8$，$a_1=3$　より　$a_{n+1}-\frac{8}{3}=-2\left(a_n-\frac{8}{3}\right)$，$a_1-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$

よって　$a_n-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}\cdot(-2)^{n-1}$　より　$a_n=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\cdot(-2)^{n-1}=\mathbf{\frac{(-2)^{n-1}+8}{3}}$

したがって　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{3}\left[\frac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1+2}+8n\right]=\mathbf{\frac{-(-2)^n+24n+1}{9}}$

(2)　$a_n=0$ となるのは　$\frac{1}{3}\cdot(-2)^{n-1}=-\frac{8}{3}$　より　$n-1=3$　ゆえに　$n=\mathbf{4}$ のときである．

$\{a_n\}$：3，2，4，0，8，-8，24，-40，…　より　$T_4=3+2+4+0=\mathbf{9}$

$n>4$ すなわち $n\geqq5$ のとき　$|a_n|=\begin{cases}a_n & (n：奇数)\\ -a_n & (n：偶数)\end{cases}$

したがって　$|a_n|=a_n\cdot(-1)^{n-1}=\frac{\mathbf{2^{n-1}+8\cdot(-1)^{n-1}}}{3}$

よって　$n>4$　すなわち　$n\geqq5$ のとき

$$T_n=T_4+\sum_{k=5}^{n}|a_k|=9+\frac{1}{3}\sum_{k=5}^{n}\{2^{k-1}+8\cdot(-1)^{k-1}\}$$

$$=9+\frac{1}{3}\left[\frac{2^4(2^{n-4}-1)}{2-1}+\frac{8\{1-(-1)^{n-4}\}}{1+1}\right]$$

$$=9+\frac{1}{3}(2^n-16)+\frac{4}{3}\{1-(-1)^{n-4}\}=\frac{2^n-4(-1)^n+15}{3}$$

n が奇数のとき　$T_n=\mathbf{\frac{2^n+19}{3}}$　　n が偶数のとき　$T_n=\mathbf{\frac{2^n+11}{3}}$

2　$\{a_n\}$：1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{27}$，…

(1)　$\{b_n\}$ は初項 $\mathbf{\frac{1}{3}}$，公比 $\mathbf{\frac{1}{9}}$ の等比数列である．

ゆえに　$b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{2(n-1)}}=\frac{1}{3^{2n-1}}$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}}=\mathbf{\frac{3}{8}}\left(1-\mathbf{\frac{1}{9^n}}\right)$$

$$b_1b_2\cdots b_n=\frac{1}{3^1}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3^{2n-1}}=\frac{1}{3^{\frac{n(1+2n-1)}{2}}}=\mathbf{\frac{1}{3^{n^2}}}$$

(2)　$c_n=2n\cdot b_n$　…(ア)　より　$c_{n+1}=2(n+1)\cdot b_{n+1}=(2n+2)\cdot\frac{1}{9}b_n$

$9c_{n+1}=(2n+2)\cdot b_n$　…(イ)　　(イ)−(ア)より　$\mathbf{9c_{n+1}-c_n=2b_n}$　であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=2\sum_{k=1}^{n}b_k=2T_n\quad\cdots\cdots①$$

①の左辺$=(9c_2-c_1)+(9c_3-c_2)+(9c_4-c_3)+\cdots+(9c_{n+1}-c_n)$

$=8(c_2+c_3+\cdots+c_n)+9c_{n+1}-c_1=8(U_n-c_1)+9c_{n+1}-c_1$

$=\mathbf{8}U_n+\mathbf{9}c_{n+1}-\mathbf{9}c_1$

よって　①より　$U_n=\dfrac{1}{4}T_n-\dfrac{9}{8}c_{n+1}+\dfrac{9}{8}c_1$　であり

$c_{n+1}=2(n+1)\cdot b_{n+1}=2(n+1)\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$ より

$$U_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-\frac{3}{4}(n+1)\cdot\frac{1}{9^n}+\frac{9}{8}\cdot2\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{3}{32}+\frac{3}{4}-\left\{\frac{3}{32}+\frac{3}{4}(n+1)\right\}\cdot\frac{1}{9^n}$$

$$=\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{32}}-\frac{\mathbf{24}n+\mathbf{27}}{32}\cdot\frac{1}{\mathbf{9}^n}$$

3　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると　$a_2=-\dfrac{7}{3}$，$a_5=-\dfrac{25}{3}$ であることより

$a+d=-\dfrac{7}{3}$，$a+4d=-\dfrac{25}{3}$　　ゆえに　$a=a_1=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$，$d=\mathbf{-2}$

$a_n=-\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot(-2)=\mathbf{-2}n+\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{2}\left\{-\frac{1}{3}+\left(-2n+\frac{5}{3}\right)\right\}=-n^2+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}n$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n=\frac{4}{3}b_n-n^2+\frac{2}{3}n$　……①　について

$n=1$ のとき　$b_1=\dfrac{4}{3}b_1-1+\dfrac{2}{3}$ より　$b_1=\mathbf{1}$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$　すなわち　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_k=b_{n+1}$　である．これと①より

$$b_{n+1}=\frac{4}{3}b_{n+1}-\frac{4}{3}b_n+\left\{-(n+1)^2+\frac{2}{3}(n+1)\right\}-\left(-n^2+\frac{2}{3}n\right)$$

ゆえに　$b_{n+1}=\mathbf{4}b_n+\mathbf{6}n+\mathbf{1}$　である．

これが　$b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=r(b_n+\alpha n+\beta)$ と変形できるとすると，$r=4$ であり，

$b_{n+1}=4b_n+3\alpha n+(3\beta-\alpha)$　である．

係数比較して　$3\alpha=6$，$3\beta-\alpha=1$　　ゆえに　$\alpha=2$，$\beta=1$

したがって　$b_{n+1}+\mathbf{2}(n+1)+\mathbf{1}=4(b_n+2n+1)$，$b_1+2\cdot1+1=4$

よって　$c_n=b_n+2n+1$ とおくと　$c_{n+1}=4c_n$，$c_1=4$ より

$\{c_n\}$ は初項 **4**，公比 **4** の等比数列である．

よって　$c_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$　　したがって　$b_n+2n+1=4^n$

ゆえに　$b_n=\mathbf{4}^n\mathbf{-2}n\mathbf{-1}$

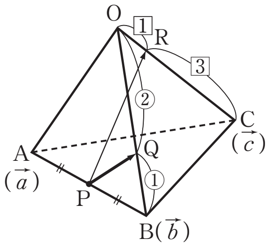
第９講　ベクトル①

【CHECK & UP】

1　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$



まずは扱うベクトルのそれぞれの「大きさ」とその内の２つの「内積」を出すところから開始．大きさと内積から派生していく．平面なら２つ，空間なら３つのベクトルが標準的．次に，上のベクトルと「始点が異なる」場合は「分割」をし始点替えを行う．結果「引き算の形」となる．その後，「伸縮」「分点」の知識を使うことで，新しいベクトルは上のベクトルの実数倍，和・差の形 $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$ として表せる．この形を１次結合という．
「分点」について，例えば AB を 1：2 に内分する点 P を表すベクトルは $\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ と表せるが，これを $\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ のように最初から分けておきたい．今後同じベクトルをまとめたり，内積の計算に役立ったりで便利である．また，「係数の和が 1」と認識できることも後に役立つ．

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$

$=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{6}(3\vec{a}-\vec{b})$　$\overrightarrow{PR}=-\dfrac{1}{4}(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$ より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2|3\vec{a}-\vec{b}|^2=\dfrac{1}{6^2}(9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$=\dfrac{1}{6^2}(9-3+1)=\dfrac{7}{6^2}$

$|\overrightarrow{PR}|^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2|2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}|^2=\dfrac{1}{4^2}(4|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}-4\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\dfrac{1}{4^2}(4+4+1+4-2-2)=\dfrac{9}{4^2}$

１次結合で表された「ベクトルの大きさ」は，「２乗」することで上の基本ベクトルの「内積計算」に持ち込むことができる．このことは内積の定義
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos0^\circ=|\vec{a}|^2$ を右から読むことで得られるであろう．
ここで大きさを求めたいベクトルにおいて，左の解答のように「くくりだし」を行ってから２乗すると，分数にとらわれることなく効果的に計算ができ楽であることが多い．これは１次結合の形で表された２つのベクトルの「内積計算」においても同じである．

よって　$|\overrightarrow{PQ}|=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$　　$|\overrightarrow{PR}|=\dfrac{3}{4}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\dfrac{1}{24}(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$=\dfrac{1}{24}(6|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c})$

$=\dfrac{1}{24}\left(6+3-\dfrac{3}{2}-1-2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{24}$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{\dfrac{5}{24}}{\dfrac{\sqrt{7}}{6}\cdot\dfrac{3}{4}}=\dfrac{5}{3\sqrt{7}}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{7}}{21}}$

2　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|=1$ より　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=1$　　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$|\vec{a}|=1$ より　$2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0$　……①

$|2\vec{a}+\vec{b}|=1$　より　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=1$　　$4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

よって　$4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=-3$　……②

①−② より　$-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$　　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$

このとき，①より　$|\vec{b}|^2=3$　　ゆえに　$|\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

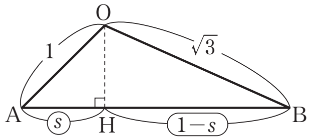
三角形の面積においても，２つのベクトルの「大きさ」と「内積」により計算可能である．これは三角比において三角形の面積が「２辺とその間の角」が分かれば計算できるのとイメージがかぶるであろう．ご存じの人もいるであろうが，ベクトルにおける三角形の面積公式は，「余弦定理」を適用して証明することが可能である．

(2)　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\times|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1\times3-\frac{9}{4}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

(3)　H は辺 AB 上の点より，

$\overrightarrow{OH}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$　$(0<s<1)$　とおくことができる．



$OH\perp AB$ より　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　　$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$-\frac{3}{2}(1-s)-(1-s)+3s+\frac{3}{2}s=0$　　$s=\frac{5}{14}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\frac{9}{14}\vec{a}+\frac{5}{14}\vec{b}=\boldsymbol{\frac{1}{14}(9\vec{a}+5\vec{b})}$

ここで　$|9\vec{a}+5\vec{b}|^2=81|\vec{a}|^2+90\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2$

$=81-135+75=21$　より

$|\overrightarrow{OH}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{14}}$

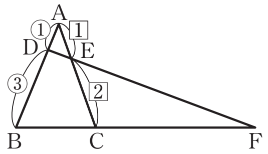
分点を表すベクトルを表現するとき，その比がわからない場合は，最初から「和が 1 となるよう」$s:(1-s)$ などとおくことで左のように表すことができる．
また，垂直すなわち内積 0 であることはあまりに有名．ここで内積計算において分配法則的な計算を行う際，同じベクトルや内積でまとめる必要はない．なぜならば，分配した後に基本ベクトルの「大きさ」「内積」を代入し，「パラメーターごとに」まとめて行く必要があるからだ．

3　(1)　$\overrightarrow{DF}=t\overrightarrow{DE}$ より　$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=t(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$

よって　$\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}$

$=(1-t)\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+t\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{t}{3}\overrightarrow{AC}}$



ある直線上に新たに点を設定したとき，「分点」と「伸縮」のどちらを選択するかを取捨選択しなければならない．しかしながらセンター試験では時に与えられたものから開始して進める必要がある．

(2) 誘導① $\overrightarrow{BF}=s\overrightarrow{BC}$ より $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=s(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

よって　$\overrightarrow{AF}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は１次独立より

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1-t)=1-s \\ \dfrac{t}{3}=s\end{cases}\qquad \begin{cases}s=3 \\ t=9\end{cases}$$

よって　$\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{BC}$ より　BC：CF＝**1：2**

誘導①は，(1)と同じく伸縮で表されたベクトルを分割し，分点を表す形に変換し，(1)と比較した．「１次独立」すなわち２ベクトルが平行でなく０ベクトル（長さ０のベクトル）でもないことは図形的に明確．よって $\vec{a}$，$\vec{b}$ のそれぞれの係数を比較することができる．最後は伸縮率より比を出した．

誘導② 点Ｆが直線BC上にあるとき，
$\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ に関して $\boldsymbol{\alpha+\beta=1}$ が成り立つ．

よって　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{4}(1-t)\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{3}\overrightarrow{AC}$　において

$$\frac{1}{4}(1-t)+\frac{t}{3}=1 \qquad t=\mathbf{9}$$

このとき　$\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$　より

ＦはBCを３：２に外分する点である．

ゆえに　BC：CF＝**1：2**

誘導②は，(1)の分点の式でそのまま $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の前の数字を「たして１」にすれば t がわかる，というもの．ただしこの t は「$\overrightarrow{DE}$ をどれだけ伸ばせばよいのか」を表したもの．よってBC：CFを求めるためには分点の形の式に代入しなければならない．ちなみに，$\overrightarrow{AB}$ の前の数字に「マイナス」がついているため，ＢからＣの方向へ３行くときにＣを「飛び越し」，その後Ｂの方向に「戻る」．外分の式を立式することは少ないが練習しておくことが理解のために望ましい．

誘導③ メネラウスの定理により　$\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DB}=1$

つまり　$\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{3}=1$　　よって　$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

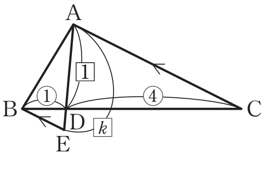
ゆえに　BC：CF＝**1：2**

BC：CFを出すだけならこの定理を用いればベクトルは不必要．この定理は数学Ａ「平面図形」の範囲である．よってこれを利用できる問題はセンター数学のベクトルでは激減した．同様，「三角形の面積比」も平面図形とみなされるためか同じく出題が激減した．

4 (1) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}$

$$=-\overrightarrow{AB}+k\left(\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=-\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{k}\right)\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{5}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$



(2) BE∥AC より　$\overrightarrow{BE}=t\overrightarrow{AC}$ と表される．

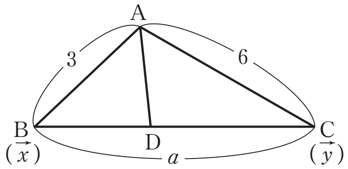
$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は１次独立より

$$1-\frac{4}{5}k=0 \qquad \text{よって}\quad k=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$$

「伸縮」で与えられているため，「たどり」で $\overrightarrow{BE}$ を出した．これは最初のたどりで「始点」Ａに簡単に戻れたためである．そうでなければ「分割」の方が早い．
この問題は「三角形の相似」を用いれば k は簡単に出る．この問題で確認すべきは，１次結合の形で表した後に，条件より「一方のベクトルのみ」で表せる，すなわちもう一方のベクトルの前の係数が「0」となるという流れ．空間図形にも応用できる．

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　三角形の成立条件より　$3<a<9$



(1)　$a\overrightarrow{PA}+6\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より

$$-a\overrightarrow{AP}+6(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$(a+9)\overrightarrow{AP}=6\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{a}+\mathbf{9}}\vec{x}+\frac{\mathbf{3}}{a+9}\vec{y}=\frac{9}{a+9}\left(\frac{2}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}\right)$$

よって　$\overrightarrow{AD}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{x}+\frac{\mathbf{1}}{3}\vec{y}=\frac{1}{3}(2\vec{x}+\vec{y})$ であり，点Dは線分BCを $1:2$ に内分する点である．

(2)　(1)より　$\overrightarrow{AD}\cdot\vec{x}=\left(\frac{2}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}\right)\cdot\vec{x}=\frac{2}{3}|\vec{x}|^2+\frac{1}{3}\vec{x}\cdot\vec{y}=\mathbf{6}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{x}\cdot\vec{y}$

また　$\vec{x}\cdot\vec{y}=\frac{9+36-a^2}{2}=\frac{\mathbf{45}-a^2}{\mathbf{2}}$　より　$\overrightarrow{AD}\cdot\vec{x}=6+\frac{1}{3}\cdot\frac{45-a^2}{2}=\frac{\mathbf{81}-a^2}{\mathbf{6}}$

(3)　$AD=2$ より　$|\overrightarrow{AD}|=2$

つまり　$\frac{1}{3}|2\vec{x}+\vec{y}|=2$　　$|2\vec{x}+\vec{y}|=6$　　$4|\vec{x}|^2+4\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2=36$

$$36+4\cdot\frac{45-a^2}{2}+36=36 \qquad a^2=63 \qquad \text{よって}\quad a=\mathbf{3\sqrt{7}} \qquad \text{このとき}\quad \vec{x}\cdot\vec{y}=-9$$

$\overrightarrow{PH}\perp\vec{x}$ より $\overrightarrow{PH}\cdot\vec{x}=\mathbf{0}$　すなわち　$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AP})\cdot\vec{x}=0$

$\overrightarrow{AH}=t\vec{x}$ とおくと　$\left(t\vec{x}-\frac{2}{\sqrt{7}+3}\vec{x}-\frac{1}{\sqrt{7}+3}\vec{y}\right)\cdot\vec{x}=0$

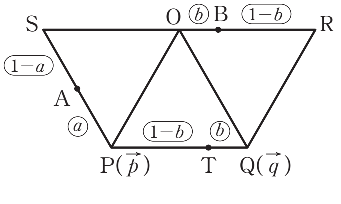
$$t|\vec{x}|^2-\frac{2}{3+\sqrt{7}}|\vec{x}|^2-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{x}\cdot\vec{y}=0 \qquad 9t-\frac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot9-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\cdot(-9)=0$$

よって　$t=\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{2}}$　　したがって

$$\overrightarrow{PH}=\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{x}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}\vec{x}-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{y}$$

$$=-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{x}-\frac{1}{3+\sqrt{7}}\vec{y}=\frac{\sqrt{\mathbf{7}}-\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\vec{x}+\frac{\sqrt{\mathbf{7}}-\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\vec{y}$$

2　(1)　$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}=\vec{p}-\boldsymbol{a}\vec{q}$



$$\overrightarrow{OB}=b\overrightarrow{OR}=b(\vec{q}-\vec{p})=-\boldsymbol{b}\vec{p}+\boldsymbol{b}\vec{q}$$

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SR}=-(1-a)\vec{q}+2(\vec{q}-\vec{p})$$

$$=-\mathbf{2}\vec{p}+(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\vec{q}$$

$$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OT}=\boldsymbol{b}\vec{p}+(\mathbf{1}-\boldsymbol{b})\vec{q}$$

ここで　$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ より

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BQ}=\{-2\vec{p}+(a+1)\vec{q}\}\cdot\{b\vec{p}+(1-b)\vec{q}\}$

$=-2b\cdot1^2-2(1-b)\cdot\dfrac{1}{2}+(a+1)b\cdot\dfrac{1}{2}+(a+1)(1-b)\cdot1^2$

$=\dfrac{1}{2}(-4b-2+2b+ab+b+2a-2ab+2-2b)=\mathbf{\dfrac{1}{2}(2a-3b-ab)}$

(2)　AR⊥BQ より　$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$　　$2a-3b-ab=0$　　$(a+3)b=2a$

よって　$b=\mathbf{\dfrac{2a}{a+3}}$

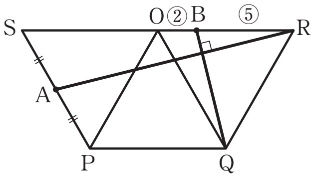
$a=\dfrac{1}{2}$ のとき　$b=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+3}=\dfrac{2}{7}$

$|\overrightarrow{AR}|^2=\left|-2\vec{p}+\dfrac{3}{2}\vec{q}\right|^2=4\cdot1^2-6\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{4}\cdot1^2=\dfrac{13}{4}$　　ゆえに　$|\overrightarrow{AR}|=\mathbf{\dfrac{\sqrt{13}}{2}}$

$|\overrightarrow{BQ}|^2=\left|\dfrac{2}{7}\vec{p}+\dfrac{5}{7}\vec{q}\right|^2=\left(\dfrac{1}{7}\right)^2|2\vec{p}+5\vec{q}|^2=\left(\dfrac{1}{7}\right)^2\left(4+20\cdot\dfrac{1}{2}+25\right)=\dfrac{39}{7^2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{BQ}|=\mathbf{\dfrac{\sqrt{39}}{7}}$

(四角形 ABRQ)$=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AR}\cdot\mathrm{BQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{13}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{39}}{7}=\mathbf{\dfrac{13\sqrt{3}}{28}}$



AR と BQ の交点 C について

C が AR 上より　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AR}$

$=\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{q}+s\left(-2\vec{p}+\dfrac{3}{2}\vec{q}\right)$

$=(1-2s)\vec{p}+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}s\right)\vec{q}$

C が BQ 上より　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BQ}$

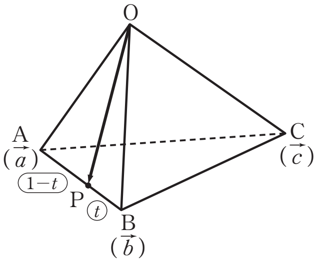
$=-\dfrac{2}{7}\vec{p}+\dfrac{2}{7}\vec{q}+t\left(\dfrac{2}{7}\vec{p}+\dfrac{5}{7}\vec{q}\right)$

$=\left(-\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{7}t\right)\vec{p}+\left(\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{7}t\right)\vec{q}$

$\vec{p}$, $\vec{q}$ は1次独立より　$1-2s=-\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{7}t,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}s=\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{7}t$

よって　$s=\dfrac{8}{13}$　$\left(t=\dfrac{5}{26}\right)$

ゆえに　$\overrightarrow{OC}=\mathbf{\dfrac{1}{26}(-6\vec{p}+11\vec{q})}$



3　(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2=\mathbf{3}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2+2-3}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{2+3-2}{2}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{3+2-3}{2}=\mathbf{1}$　　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$　　$|\vec{c}|=\sqrt{3}$

(2) $\overrightarrow{OP}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ とおく

$\overrightarrow{CP}\cdot\vec{a}=0$ より $(\overrightarrow{OP}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}-\vec{c}\}\cdot\vec{a}=0 \qquad 2t+(1-t)\cdot\frac{1}{2}-1=0 \qquad t=\frac{1}{3}$

ゆえに $\overrightarrow{CP}=\mathbf{\frac{1}{3}}\vec{a}+\mathbf{\frac{2}{3}}\vec{b}-\vec{c}$ であり，点Ｐは線分ABを $2:1=1:\mathbf{\frac{1}{2}}$ に内分する．

このとき $\overrightarrow{CP}\cdot\vec{b}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{3}{2}=\frac{1+8-9}{6}=\mathbf{0}$ より

よって $\overrightarrow{CP}\perp\vec{b}$ である．これと $\overrightarrow{CP}\perp\vec{a}$ であることより，$\overrightarrow{CP}\perp$ 平面 **OAB**

$$|\overrightarrow{CP}|^2=\frac{1}{3^2}|\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}|^2=\frac{1}{3^2}\left(2+4\times 2+9\times 3+2\times 2\times\frac{1}{2}-2\times 6\times\frac{3}{2}-2\times 3\times 1\right)$$
$$=\frac{15}{3^2}$$

より $|\overrightarrow{CP}|=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{3}}$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{16-1}}{2}=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

四面体OABCの体積は $\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot CP=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\mathbf{\frac{5}{12}}$

第 10 講　ベクトル②

【CHECK & UP】

1 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-1,\ 0,\ 1)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{1+0+1}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 2,\ 0)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{1+4+0}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1+0+0=\boldsymbol{1}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$=\dfrac{1}{3}\{(0,\ 0,\ 1)+(1,\ 0,\ 0)+(0,\ 2,\ 0)\}$

$=\dfrac{1}{3}(1,\ 2,\ 1)=\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}}\right)$

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2\times|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot5-1}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

四面体 OABC の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OH}$

また　$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{OC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\times2=\dfrac{1}{3}$　より

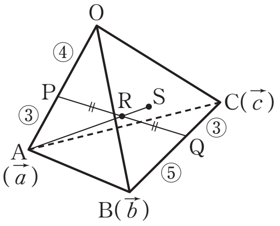
$\dfrac{1}{2}\mathrm{OH}=\dfrac{1}{3}$　　ゆえに　$\mathrm{OH}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

成分表示の概念は平面でも空間でも同じ．始点から終点までの「進む量および方向」を示したものである．よってその「大きさ」は「三平方の定理」で計算できる．また，成分表示ならではの「内積の公式」も存在する．
さらに，平面限定であるが成分表示ならではの「三角形の面積の公式」

$\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

も存在する．空間にもあるにはあるが，「外積」の知識が必要であるため，センター前に覚えていない人が新たに覚える必要はない．
今回与えられた３点はすべて「座標軸」上に乗っている．そのことを利用した問題である．ちなみに乗っていない場合は，数Ⅲがからまない限り図示してもほぼ無意味．

2 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{5}{8}\vec{c}-\dfrac{4}{7}\vec{a}}$



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$=\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{5}{8}\vec{c}\right)$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{16}\vec{b}+\dfrac{5}{16}\vec{c}}$

※もし，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ なしに直接 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を出すならば

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{5}{8}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{16}\vec{b}+\dfrac{5}{16}\vec{c}}$

空間においても，「分点」の表現は「２ベクトル」であることに変わりはない．ただし，その２ベクトルのそれぞれを出す際に，「伸縮」や「分点」などでさらに２ベクトルが絡む場合もあり，一般的に手数が増える．それに耐えうる計算力を身につけておかねばならない．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=t\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{2}{7}t\vec{a}+\dfrac{3}{16}t\vec{b}+\dfrac{5}{16}t\vec{c}$

$=\boldsymbol{\left(1-\dfrac{5}{7}t\right)\vec{a}+\dfrac{3}{16}t\vec{b}+\dfrac{5}{16}t\vec{c}}$

S は平面 OBC 上より，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表される．

第９講でも出てきた「１つのベクトルが不要」の空間版である．ベクトルの終点が「ある平面上にある」という問題の解法の１つである．

よって　$1-\dfrac{5}{7}t=0$　　ゆえに　$\boldsymbol{t=\dfrac{7}{5}}$　　このとき　AR：RS＝**5：2**

(3)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$ としても一般性を失わない．

> 今回の問題は，ベクトルの大きさについては一切触れられていない．かつ，「正四面体」であるため，すべての辺の長さが等しい．大きさが「不定」の状態でその「角度」が問われるているため，その大きさは解答に影響しないのは当然であろう．今回は，分数を極力回避するために１辺の長さを２とした．

このとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2\cdot2\cdot\dfrac{1}{2}=2$

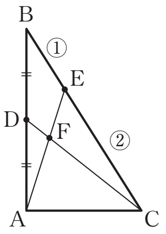
$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\frac{1}{8^2}|3\vec{b}+5\vec{c}|^2=\frac{1}{8^2}(9|\vec{b}|^2+30\vec{b}\cdot\vec{c}+25|\vec{c}|^2)$$

$$=\frac{1}{8^2}(36+60+100)=\frac{14^2}{8^2}=\left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{a}\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)=\frac{1}{8}(3\cdot2+5\cdot2)=2$$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{AOQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{2}{2\cdot\dfrac{7}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$

3　(1)　点 F は CD 上の点であることから



$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{BD}}+s\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+s\overrightarrow{\mathrm{BC}}\quad\cdots\cdots①$$

点 F は AE 上の点であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\quad\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は１次独立より，①，②から

$\dfrac{1}{2}(1-s)=1-t$，$s=\dfrac{t}{3}$　　よって　$s=\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{3}{5}$

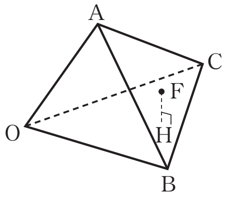
ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より　$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$，$\beta=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{b}+\dfrac{2}{5}(\vec{a}-\vec{b})+\dfrac{1}{5}(\vec{c}-\vec{b})=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2+9-5}{2}=\boldsymbol{3}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{9+4-7}{2}=\boldsymbol{3}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{4+2-2}{2}=\boldsymbol{2}$



(3)　FH⊥平面OBCより

$\overrightarrow{FH}\cdot\vec{b}=0$　……①　かつ　$\overrightarrow{FH}\cdot\vec{c}=0$　……②

である．

①より　$\left(-\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{c}+x\vec{b}+y\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$

$(5x\vec{b}+5y\vec{c}-2\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

$5x\cdot9+5y\cdot3-2\cdot3-2\cdot9-3=0$

よって　$15x+5y=9$　……①′

②より　$(5x\vec{b}+5y\vec{c}-2\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{c}=0$

$5x\cdot3+5y\cdot4-2\cdot2-2\cdot3-4=0$

よって　$15x+20y=14$　……②′

①′，②′より　$x=\mathbf{\frac{22}{45}}$，$y=\mathbf{\frac{1}{3}}$

空間ベクトルにおいて利用する知識でもっとも重要なものの１つは，「直線がある平面に垂直」⇔「直線の方向ベクトルが平面上の１次独立である２つのベクトルと垂直」である．近年のセンターではそれが問題文中に表記されることが多いが，それがなくとも問題の流れから平面に含まれるベクトルの内２つを選択し，それと直線の方向ベクトルとの内積をとって0にする．
内積をとったあとの式は「パラメータに関する連立方程式」である．よって，内積をとる前の式をベクトルごと（$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ごと）にまとめる必要は全くない．
また「ある点が平面上にある」ことの知識は，今回は「たどる」ことでまず平面上に移動したが，他にも「終点がその平面上にある１次独立な３ベクトル」で表し，「係数の和が1」とする流れもある．

(4)　(3)より　$\overrightarrow{OH}=\frac{22}{45}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OH}=\frac{22}{45}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$ と表すと，MはBC上の点より

$\frac{22}{45}k+\frac{1}{3}k=1$　　$k=\frac{45}{37}$

よって　$\overrightarrow{OM}=\frac{22}{37}\vec{b}+\frac{15}{37}\vec{c}$　より　BM：MC＝**15：22**

最後は「平面ベクトル」．今回はパラメータkを設定して伸ばし，「係数の和＝1」としたが，もちろん以下のように変形により導いてもよい．

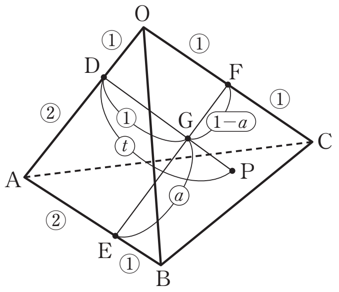
$\overrightarrow{OH}=\frac{22}{45}\vec{b}+\frac{15}{45}\vec{c}$

$=\frac{37}{45}\left(\frac{22}{37}\vec{b}+\frac{15}{37}\vec{c}\right)$

数列と比較すれば，図形分野であるベクトルは，その解法が非常に多岐にわたるがゆえに，センター試験側から提示された「流れ」を理解すれば誘導に乗って解くことができる．よって，「たどり」と「分割」，「伸縮」と「分点」など，本来同じところに行き着くものを相互変換できるようになっている必要がある．様々な問題を経験することで問題を一歩引いた始点から眺めることができるようになる．それが遅いと，ベクトルの計算量は数学ⅡＢで１，２位を争う分野であるため最後まで行けないということもある．全てを記すことなく「大きさ」や「内積」などの値を代入しつつどんどん進められるよう，計算練習を怠らないこと．

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．



(1)　G が線分 EF を $a:(1-a)$ に内分する点であることより

$$\overrightarrow{OG}=(1-a)\overrightarrow{OE}+a\overrightarrow{OF}=(1-a)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+a\cdot\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{3}(\mathbf{1-a})\overrightarrow{OA}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}(1-a)\overrightarrow{OB}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{OC}$$

(2)　P が直線 DG 上にあることより

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{OD}+t(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OD})=(1-t)\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OG}$$

$$=(1-t)\cdot\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}(1-a)t\vec{a}+\frac{2}{3}(1-a)t\vec{b}+\frac{a}{2}t\vec{c}$$

$$=\frac{\mathbf{1-at}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(1-a)t\overrightarrow{OB}+\frac{a}{2}t\overrightarrow{OC}$$

P は平面 OBC 上にあるので，$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$ の形で表される．

よって　$\frac{1-at}{3}=0$　　$t=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}$　　このとき　$\overrightarrow{OP}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3a}}(1-a)\overrightarrow{OB}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{OC}$

(3)　P が辺 BC 上にあるのは　$\frac{2}{3a}(1-a)+\frac{1}{2}=1$　　$\frac{2}{3a}(1-a)=\frac{1}{2}$

よって　$a=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$ のとき

さらに　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD})=\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot1^2$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

2　(1)　$\overrightarrow{OE}=(1-a)\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{AB}=(1,\ 0,\ 0)+a(-1,\ 1,\ 1)=(-a+1,\ a,\ a)$

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+a\overrightarrow{CD}=(1,\ 0,\ 1)+a(-3,\ -1,\ -3)=(-3a+1,\ -a,\ -3a+1)$

よって　$\overrightarrow{EF}=(\mathbf{-2a},\ \mathbf{-2a},\ \mathbf{1-4a})$

$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$(-2a,\ -2a,\ 1-4a)\perp(-1,\ 1,\ 1)$

よって　$2a-2a+1-4a=0$　　$a=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

(2)　$a=\frac{1}{4}$ のとき　$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(3,\ 1,\ 1)$，

$\overrightarrow{OF}=\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(1,\ -1,\ 1)$　　$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)=-\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 0)$

よって　$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+b\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}\{(3,\ 1,\ 1)-2b(1,\ 1,\ 0)\}=\left(\frac{\mathbf{3-2b}}{\mathbf{4}},\ \frac{\mathbf{1-2b}}{4},\ \frac{\mathbf{1}}{4}\right)$

(3)　H が BC 上より　$\overrightarrow{BH}=s\overrightarrow{BC}$ と表すと，

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{BC}=(0,\ 1,\ 1)+s(1,\ -1,\ 0)=(s,\ -s+1,\ 1)$

また，H は OG 上より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\dfrac{3-2b}{4}t,\ \dfrac{1-2b}{4}t,\ \dfrac{1}{4}t\right)$

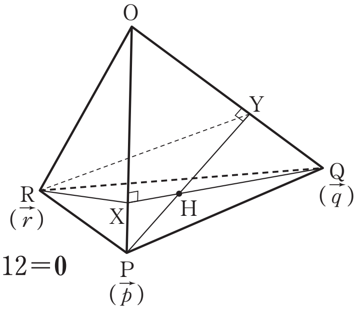
よって　$s=\dfrac{3-2b}{4}t$　……①　　$-s+1=\dfrac{1-2b}{4}t$　……②　　$1=\dfrac{1}{4}t$　……③

③より　$t=\mathbf{4}$　　これを①，②に代入して　$s=3-2b$　　$-s+1=1-2b$

よって　$b=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$，$s=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

ゆえに　$\mathrm{H}\left(\mathbf{\dfrac{3}{2}},\ \mathbf{-\dfrac{1}{2}},\ \mathbf{1}\right)$

$s=\dfrac{3}{2}$ より，H は線分 BC を $\dfrac{3}{2}:\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}:1$ に外分する．



3 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=a\vec{p}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{QX}}=\boldsymbol{a}\vec{p}-\vec{q}$

$\overrightarrow{\mathrm{QX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$　より　$(a\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{p}=0$

$16a-12=0$　　ゆえに　$a=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

$\overrightarrow{\mathrm{RX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{3}{4}\vec{p}-\vec{r}\right)\cdot\vec{p}=\dfrac{3}{4}\cdot4^2-12=\mathbf{0}$

同様に　$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=b\vec{q}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\vec{q}=0$　より　$(b\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{q}=0$　　$18b-12=0$　　ゆえに　$b=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

$\overrightarrow{\mathrm{RY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{q}-\vec{r}\right)\cdot\vec{q}=\dfrac{2}{3}\cdot18-12=\mathbf{0}$

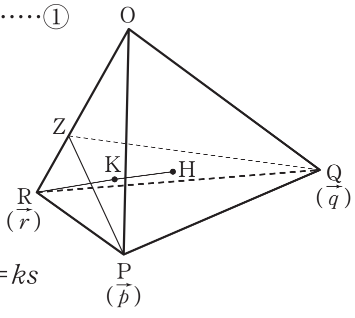
(2)　メネラウスの定理より　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PX}}\cdot\dfrac{\mathrm{XH}}{\mathrm{HQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{QY}}{\mathrm{YO}}=1$　つまり　$\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{XH}}{\mathrm{HQ}}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{XH}}{\mathrm{HQ}}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\vec{p}+\dfrac{1}{3}\vec{q}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}\vec{p}+\mathbf{\dfrac{1}{3}}\vec{q}$

$\overrightarrow{\mathrm{HK}}=t\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OH}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(\mathbf{1}-t)\left(\dfrac{1}{2}\vec{p}+\dfrac{1}{3}\vec{q}\right)+t\vec{r}$　……①



また，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=s\vec{r}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PZ}}+l\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{p}+k(\overrightarrow{\mathrm{OZ}}-\vec{p})+l(\vec{q}-\vec{p})$

$=(1-k-l)\vec{p}+l\vec{q}+k\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$

$=(1-k-l)\vec{p}+l\vec{q}+ks\vec{r}$　……②

①，②より　$\dfrac{1}{2}(1-t)=1-k-l$　　$\dfrac{1}{3}(1-t)=l$　　$t=ks$

よって　$\dfrac{1}{2}(1-t)=1-\dfrac{t}{s}-\dfrac{1}{3}(1-t)$　　$t=\dfrac{s}{\mathbf{6-5}s}$

さらに　$\overrightarrow{\mathrm{PZ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=0$ より　$(s\vec{r}-\vec{p})\cdot\vec{r}=0$　　$28s-12=0$　　ゆえに　$s=\mathbf{\dfrac{3}{7}}$，$t=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$

補講　図形と方程式

1 (1) 点 A(0, 1) を通り，傾きが a である直線 l の方程式は $y=\boldsymbol{a}x+\mathbf{1}$

点 P の x 座標は，$C：x^2+y^2=1$ と l の方程式より y を消去して

$$x^2+(ax+1)^2=1 \qquad (a^2+1)x^2+2ax=0 \qquad x\{(1+a^2)x+2a\}=0$$

$x\neq0$ より　$x=\dfrac{\mathbf{-2}a}{a^2+\mathbf{1}}$　　このとき y 座標は　$y=a\cdot\dfrac{-2a}{a^2+1}+1=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$

円 C 上の点 P における接線 m の方程式は，円の接線の公式より

$$\left(\frac{-2a}{a^2+1}\right)x+\left(\frac{-a^2+1}{a^2+1}\right)y=1 \qquad -2ax+(1-a^2)y=a^2+1$$

よって　$\mathbf{2}ax+(a^2\mathbf{-1})y+a^2+\mathbf{1}=0$

(2) 点 Q の x 座標は，l の式に $y=-2$ を代入して

$$-2=ax+1 \qquad x=-\frac{3}{a}$$

点 R の x 座標は，m の式に $y=-2$ を代入して

$$2ax-2(a^2-1)+a^2+1=0 \qquad x=\frac{a^2-3}{2a}$$

よって線分 QR の長さ s は，

$$s=\frac{a^2-3}{2a}-\left(-\frac{3}{a}\right)=\frac{a^2+\mathbf{3}}{\mathbf{2}a}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+3}{a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)$$

$a>0$ のとき　相加平均と相乗平均の関係より　$a+\dfrac{3}{a}\geqq2\sqrt{a\cdot\dfrac{3}{a}}=2\sqrt{3}$

等号成立は　$a=\dfrac{3}{a}$ より $a^2=3$　　$a>0$ より $a=\sqrt{3}$ のとき

よって　$s\geqq\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

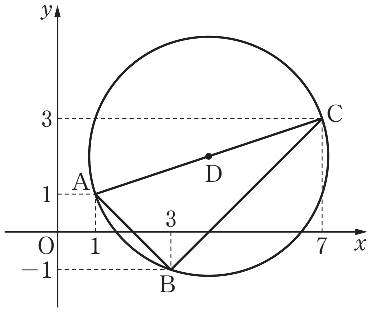
したがって，s の最小値は　$\sqrt{\mathbf{3}}$（$a=\sqrt{\mathbf{3}}$ のとき）

2 (1) 直線 AB の傾きは　$\dfrac{1-(-1)}{1-3}=\mathbf{-1}$

直線 BC の傾きは　$\dfrac{3-(-1)}{7-3}=\mathbf{1}$

AB と BC の傾きの積が -1 より

AB⊥BC　よって　$\angle\text{ABC}=\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$



したがって，線分 AC の中点が円の中心となるので，中心 D の座標は

$\left(\dfrac{1+7}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right)=(\mathbf{4},\ \mathbf{2})$　　半径は　$\text{AD}=\sqrt{(4-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{\mathbf{10}}$

点 $(0,\ k)$ から S_1 に引いた接線を　$y=mx+k$　つまり　$mx-y+k=0$　とおくと
円の中心と接線の距離が半径と等しいことより

$\dfrac{|4m-2+k|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$　　$|4m-2+k|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

$(4m-2+k)^2=10(m^2+1)$

$6m^2+8(k-2)m+k^2-4k-6=0$　……①

この m の2次方程式の2解が，2つの接線の傾きであり，
直交条件からその2解の積が -1 である．

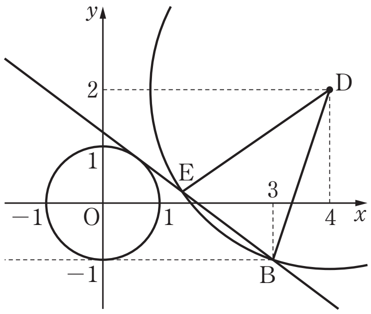
よって，解と係数の関係より　$\dfrac{k^2-4k-6}{6}=-1$

$k^2-4k=0$　　$k(k-4)=0$　　$k>0$ より　$\mathbf{k=4}$

このとき，①より　$3m^2+8m-3=0$　　$m=\dfrac{1}{3},\ -3$

よって2本の接線の傾きは　$\mathbf{\dfrac{1}{3},\ -3}$

(2)　$l:y=n(x-3)-1$　つまり　$nx-y-3n-1=0$　とおくと，
円の中心と接線の距離が半径と等しいことより



$\dfrac{|-3n-1|}{\sqrt{n^2+1}}=1$　　$(3n+1)^2=n^2+1$

$n(4n+3)=0$　　$n=0,\ -\dfrac{3}{4}$

このうち，接点の y 座標が正になるのは
$n=-\dfrac{3}{4}$ のときで，このとき l は

$y=-\dfrac{3}{4}(x-3)-1=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$　　つまり　$\mathbf{3x+4y=5}$

l と S_1 との交点は，

$(x-4)^2+\left(-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}-2\right)^2=10$　　$5x^2-22x+21=0$　　$(5x-7)(x-3)=0$

$x=\dfrac{7}{5},\ 3$　　よって　点Eの座標は $\mathbf{\left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)}$

$\mathrm{BE}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=2$　　D から l までの距離は　$\dfrac{|3\cdot4+4\cdot2-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

よって，$\triangle\mathrm{BDE}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3=\mathbf{3}$

3 円 C の中心Qは

弦ABの垂直二等分線 $y=\mathbf{1}$ 上にある.

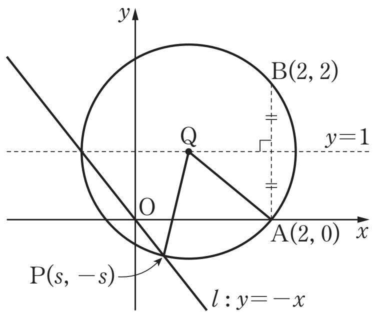
よって，$\mathrm{Q}(t,\ 1)$ とおくと

$\mathrm{AQ}^2=(t-2)^2+(1-0)^2=t^2-\mathbf{4}t+\mathbf{5}$

$\mathrm{PQ}^2=(t-s)^2+\{1-(-s)\}^2$

$=t^2-\mathbf{2}st+\mathbf{2}s^2+\mathbf{2}s+\mathbf{1}$

直線PQの傾きは $\dfrac{1-(-s)}{t-s}=\dfrac{\mathbf{1}+s}{t-s}$



円 C が直線 l に接するとき

直線PQと直線 l は垂直であることより

$\dfrac{1+s}{t-s}\times(-1)=-1$　　$\dfrac{1+s}{t-s}=\mathbf{1}$　　$1+s=t-s$　　よって　$t=\mathbf{2}s+\mathbf{1}$

さらに，$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{PQ}^2$　より

$t^2-4t+5=t^2-2st+2s^2+2s+1$

$-2st+2s^2+2s+4t-4=0$

$t=2s+1$ を代入して

$-2s(2s+1)+2s^2+2s+4(2s+1)-4=0$　　$2s^2-8s=0$　　$s(s-4)=0$

$s=\mathbf{0},\ \mathbf{4}$

$s=0$ のとき　　円 C の中心は $\mathrm{Q}(1,\ 1)$　　半径は $\mathrm{AQ}=\sqrt{2}$ より

円 C の方程式は　$(x-\mathbf{1})^2+(y-\mathbf{1})^2=\mathbf{2}$

$s=4$ のとき　　円 C の中心は $\mathrm{Q}(9,\ 1)$　　半径は $\mathrm{AQ}=\sqrt{50}$ より

円 C の方程式は　$(x-\mathbf{9})^2+(y-\mathbf{1})^2=\mathbf{50}$

＜ Note ＞

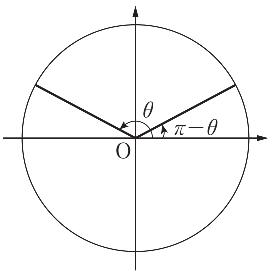
練習問題解答

第1講　三角関数①

※この練習問題の解答は，センター試験において正解をマークするための「必要最低限」の解答です．よって，途中計算やプロセスをすべて記したものではありませんが，計算のポイントとなる部分については詳細に記してある部分もあります．試験の本番にこれらをきっちりすべて記述する必要はありません．限られたスペースと時間の中で，自分にとって必要なものを計算して残す練習をしてください．

1

［1］ (1)　$f(\theta)=0$ より　$\sin(\theta-a)=\sin\theta$



$0<a<\pi$ より　$\theta-a=\pi-\theta$　ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}+\dfrac{a}{2}$

このとき　$\sin(\theta-a)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{2}\right)=\cos\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}$　より

$0<\dfrac{a}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であることから　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{\pi}{3}$　　ゆえに　$a=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\pi$

(2)　$a=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$f(\theta)=\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\theta=\sin\theta\left(-\frac{1}{2}\right)-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta$$

$$=-\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=-\sqrt{3}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

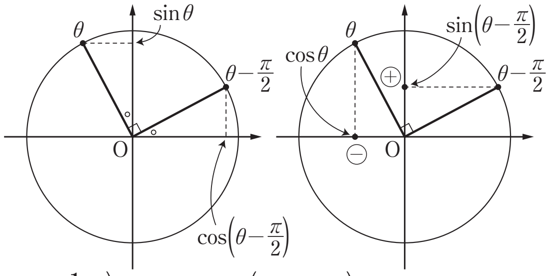
$$=-\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$

よって，$f(\theta)$ は　$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi$

つまり　$\theta=\pi$ のとき　最大値　$-\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$　をとり，

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{\mathbf{3}}$ のとき　最小値　$-\sqrt{3}\cdot1=-\sqrt{\mathbf{3}}$　をとる．



［2］　$f(x)=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin3x$

$g(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cos3x$　より

$f(x)+g(x)=2(\sin3x-\cos3x)$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin3x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos3x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}\sin\left(\mathbf{3}x-\frac{\pi}{\mathbf{4}}\right)$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq3x\leqq\dfrac{3}{2}\pi$　つまり　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq3x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$

よって　$f(x)+g(x)$ は　$3x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

つまり　$x=\dfrac{\pi}{\mathbf{4}}$ のとき　最大値　$2\sqrt{2}\cdot1=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$　をとる．

2　すべての x について　$\cos x=\sin\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}-x\right)$　よって，(1)より　$\sin 4\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$0<4\theta<2\pi$，$0<\frac{\pi}{2}-\theta<\frac{\pi}{2}$　であるから

$4\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$　または　$4\theta=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}+\theta$　　ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{\mathbf{6}}$，$\frac{\pi}{\mathbf{10}}$　$\sin\frac{\pi}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

ここで　$\sin 4\theta=\sin 2(2\theta)$ より　(1)から　$\mathbf{2}\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$

$2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\cdot(1-2\sin^2\theta)=\cos\theta$　　よって　$(\mathbf{4}\sin\theta-\mathbf{8}\sin^3\theta)\cos\theta=\cos\theta$

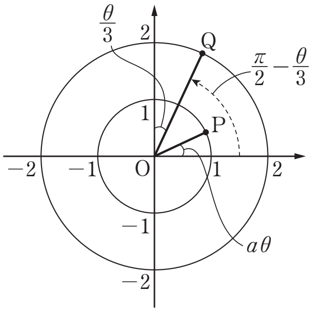
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta>0$ であるから　$4\sin\theta-8\sin^3\theta=1$

つまり　$8\sin^3\theta-4\sin\theta+1=0$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ はこの式を満たすから，この式は左辺を $2\sin\theta-1$ で割る，または組立除法を使うことにより　$(2\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$　と変形できる．

$\mathbf{4}\sin^2\theta+\mathbf{2}\sin\theta-1=0$　より　$\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$　　よって　$\sin\frac{\pi}{10}=\mathbf{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$　(>0)

3　$P(\cos a\theta,\ \sin a\theta)$　$Q\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right),\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right)$



(1)　$\theta=\pi$ のとき　$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}=\frac{\pi}{6}$　　よって　$Q(\sqrt{\mathbf{3}}，\mathbf{1})$

(2)　題意を満たすのは　$a\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}$

つまり　$\theta=\mathbf{\frac{3}{6a+2}}\pi$　のとき．

これを α とおくと　$0\leqq\theta\leqq\alpha$ のとき　$0\leqq\frac{\theta}{3}\leqq\frac{\alpha}{3}$

よって，Q の軌跡を弧とする扇形は半径 2，中心角 $\frac{\alpha}{3}$

その面積は　$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\alpha}{3}=\frac{2}{3}\alpha=\mathbf{\frac{1}{3a+1}}\pi$

(3)　$Q\left(2\sin\frac{\theta}{3},\ 2\cos\frac{\theta}{3}\right)$ より

$$PQ^2=\left(2\sin\frac{\theta}{3}-\cos a\theta\right)^2+\left(2\cos\frac{\theta}{3}-\sin a\theta\right)^2$$

$$=4\sin^2\frac{\theta}{3}-4\cos a\theta\sin\frac{\theta}{3}+\cos^2 a\theta+4\cos^2\frac{\theta}{3}-4\sin a\theta\cos\frac{\theta}{3}+\sin^2 a\theta$$

$$=4-4\left(\sin a\theta\cos\frac{\theta}{3}+\cos a\theta\sin\frac{\theta}{3}\right)+1=5-4\sin\left(a\theta+\frac{\theta}{3}\right)$$

$$=\mathbf{5}-\mathbf{4}\sin\left(\mathbf{\frac{3a+1}{3}}\theta\right)$$

(4)　$f(x)$ の基本周期は　$2\pi\cdot\frac{3}{3a+1}$　これが 4π より　$\frac{3}{3a+1}=2$　　ゆえに　$a=\mathbf{\frac{1}{6}}$

第2講　指数・対数関数①

1 (1)　$x+3^t=3^{2t-2}$ ……①　より　$x=\mathbf{\frac{1}{9}}\cdot 3^{2t}-\mathbf{3}^t$

(2)　$t=0$ のとき　$x=\frac{1}{9}\cdot 3^0-3^0=\frac{1}{9}-1=\mathbf{-\frac{8}{9}}$

(3)　$x=2\cdot 3^t$ のとき　$\log_3(2\cdot 3^t+3^t)=2t-2$

左辺は　$\log_3 3\cdot 3^t=\log_3 3^{t+1}=t+1$　　よって　$t+1=2t-2$　　ゆえに　$t=\mathbf{3}$

【別解】　$x=2\cdot 3^t$ のとき　①より　$2\cdot 3^t+3^t=3^{2t-2}$

$3^{t+1}=3^{2t-2}$　　よって　$t+1=2t-2$　　ゆえに　$t=\mathbf{3}$

(4)　$x=-\frac{9}{4}$ のとき　(1)より　$-\frac{9}{4}=\frac{1}{9}(3^t)^2-3^t$

$3^t=X$ とおくと　$-\frac{9}{4}=\frac{1}{9}X^2-X$

$4X^2-36X+81=0$　　$(2X-9)^2=0$　　$X=\frac{9}{2}$

つまり　$3^t=\frac{9}{2}$ より　$t=\log_3\frac{9}{2}=2-\log_3\mathbf{2}$

2 (1)　$b=\frac{\log_3 y}{\log_3 9}=\frac{\log_3 y}{2}$　より　$2b=\log_3 y$

(2)　$a+b=\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y=\frac{1}{2}(2\log_3 x+\log_3 y)$

$=\frac{1}{2}(\log_3 x^2+\log_3 y)=\frac{1}{2}\log_3 x^2y=\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{3}=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

【別解】　$x^2y=\frac{1}{3}$　より　$\log_3 x^2y=\log_3\frac{1}{3}$　　$2\log_3 x+\log_3 y=-1$

よって　$2a+2b=-1$　より　$a+b=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

(3)　$a+2b=\log_3 x+\log_3 y=\log_3 xy=3$　より　$xy=3^3=27$

このとき，相加平均と相乗平均の関係より　$x+y\geqq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{27}=6\sqrt{3}$

等号成立は　$x=y$　かつ　$xy=27$　より　$x=y=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$　のとき.

ゆえに　$x+y$ の最小値は　$\mathbf{6\sqrt{3}}$

(4)　$x=3^a$，$y=9^b=(3^2)^b=3^{2b}$　より　$xy=3^a\cdot 3^{2b}=3^{a+2b}$

よって，$a+2b$ が最小のとき，xy も最小となる.

$x>1$，$y>1$ より　$a>0$，$2b>0$ であるから　$a+2b\geqq 2\sqrt{a\cdot 2b}=2\sqrt{2\cdot 2}=4$

等号成立は　$a=2b$　かつ　$ab=2$　より　$a=2$，$b=1$　のとき.

よって，$a+2b$ の最小値は 4　　ゆえに　xy の最小値は　$3^4=\mathbf{81}$

3　$\log_4(x-1)+\log_4(4-x)=\log_4(a-x)$　……①

①において真数条件より　$x>1$　かつ　$x<4$　かつ　$x<a$

つまり　$1<x<4$　かつ　$x<\boldsymbol{a}$　である．

このもとで，①すなわち　$\log_4(x-1)(4-x)=\log_4(a-x)$　　$-x^2+5x-4=a-x$

つまり　$-x^2+\mathbf{6}x-\mathbf{4}=a$　……②　を解く．

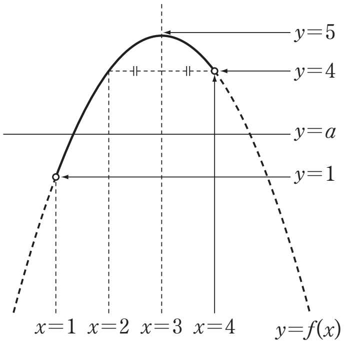
(1)　②の左辺を $f(x)$ とおき，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の x 座標について考える．

$$f(x)=-(x-3)^2+5$$

$a=\mathbf{5}$ のとき，②すなわち $f(x)=a$ は重解 $x=\mathbf{3}$ をもつ．

①がただ１つの解をもつのは，共有点が１つのとき．

よって　$a=5$　または　$\mathbf{1}<a\leqq\mathbf{4}$　のとき．



(2)　$a=4$ のとき図より $x=\mathbf{2}$

このときの①の右辺の値は　$\log_4 2=\dfrac{1}{\log_2 4}=\dfrac{1}{\mathbf{2}}$

第3講　三角・指数・対数関数②

1　$\tan\theta=t$ とおくと，①は $\tan 4\theta=\dfrac{1}{2}t$　また　$\tan 2\theta=\dfrac{\mathbf{2}\tan\theta}{\mathbf{1}-\tan^2\theta}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

$$\tan 4\theta=\tan 2(2\theta)=\frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}=\frac{2\cdot\frac{2t}{1-t^2}}{1-\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2}=\frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2-(2t)^2}=\frac{-4t^3+4t}{t^4-6t^2+1}$$

$$=\frac{-\mathbf{4}\tan^3\theta+\mathbf{4}\tan\theta}{\tan^4\theta-\mathbf{6}\tan^2\theta+\mathbf{1}}$$

①より　$\dfrac{-4t^3+4t}{t^4-6t^2+1}=\dfrac{1}{2}t$　$t-\dfrac{-8t^3+8t}{t^4-6t^2+1}=0$　$\dfrac{t^5-6t^3+t+8t^3-8t}{t^4-6t^2+1}=0$

よって　$\dfrac{t(t^4+2t^2-7)}{t^4-6t^2+1}=0$　$\dfrac{\tan\theta(\tan^4\theta+\mathbf{2}\tan^2\theta-\mathbf{7})}{\tan^4\theta-6\tan^2\theta+1}=0$　つまり　$t(t^4+2t^2-7)=0$

$t>0$ よりこの式の両辺を t で割って　$(t^2)^2+2t^2-7=0$　$t^2=-1+2\sqrt{2}\ (>0)$

ゆえに　$t=\tan\theta=\sqrt{-\mathbf{1}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}$　$2<\sqrt{8}<3$　より　$1<-1+2\sqrt{2}<2$

よって　$1<t<\sqrt{2}$

つまり　$1<\tan\theta<\sqrt{2}<\sqrt{3}$

すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}}$　である（ただし等号は成立しない）.

2［1］　$2^x\cdot 3^x-\dfrac{2^x}{27}-27\cdot 3^x+1=0$　より

$XY-\dfrac{1}{27}X-27Y+1=0$　$(X-\mathbf{27})\left(Y-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}\right)=0$

$X=27,\ Y=\dfrac{1}{27}$　つまり　$2^x=27,\ 3^x=\dfrac{1}{27}$　より

$x=\log_2 27\ (>0)$　$x=-3\ (<0)$

よって小さい方の解は $\mathbf{-3}$. また，$\log_2 16<\log_2 27<\log_2 32$　より　$4<\log_2 27<5$

よって大きい方の解の整数部分は $\mathbf{4}$ である.

［2］　①の真数は正であるから　$x>1$.　$d=\log_{10}2$ とおくと

$\log_2 27=\dfrac{\log_{10}3^3}{\log_{10}2}=\dfrac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{d}}\log_{10}3$　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\dfrac{\log_{10}(x-1)}{\log_{10}2^{-1}}=-\dfrac{1}{\boldsymbol{d}}\log_{10}(x-1)$

$\log_5\{27(x-1)\}=\dfrac{\log_{10}3^3+\log_{10}(x-1)}{\log_{10}\frac{10}{2}}=\dfrac{\mathbf{3}\log_{10}3+\log_{10}(x-1)}{\mathbf{1}-\boldsymbol{d}}$

よって，①は　$\dfrac{3}{d}\log_{10}3+\dfrac{1}{d}\log_{10}(x-1)+3\cdot\dfrac{3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)}{1-d}<0$

$d=\log_{10}2$ より　$0<d<1$　つまり　$d>0$ であるから

$3(1-d)\log_{10}3+(1-d)\log_{10}(x-1)+3d\{3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)\}<0$

$3(2d+1)\log_{10}3+(2d+1)\log_{10}(x-1)<0$

$\mathbf{3}\log_{10}3+\log_{10}(x-1)<0$

$\log_{10}27\cdot(x-1)<\log_{10}1$　$27(x-1)<1$　$x<\dfrac{28}{27}$　ゆえに　$\mathbf{1}<x<\dfrac{\mathbf{28}}{\mathbf{27}}$

3　$u=\log_2(6-x)$，$v=\log_2(x-1)$　真数は正であるから　$\mathbf{1<x<6}$

u，v の正負について

$6-x>1$　つまり　$x<5$　のとき　$u>0$　　$x-1>1$　つまり　$x>2$　のとき　$v>0$

したがって，$2<x<5$　のとき　$uv>0$　　$1<x\leqq \mathbf{2}$，$\mathbf{5}\leqq x<6$　のとき　$uv\leqq 0$　である．

よって，uv の最大値は $2<x<5$ の範囲で考える．

このとき相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{1}{2}(u+v)\geqq\sqrt{uv}$　であり

$\dfrac{1}{2}(u+v)=\dfrac{1}{2}\{\log_2(6-x)+\log_2(x-1)\}=\dfrac{1}{2}\log_2(6-x)(x-1)=\dfrac{1}{2}\log_2(-x^2+7x-6)$

より

$$\sqrt{uv}\leqq\frac{1}{2}\log_2(\mathbf{-}x^2\mathbf{+7}x\mathbf{-6})\quad\cdots\cdots(*)$$

等号成立は　$u=v$　　すなわち　$\log_2(6-x)=\log_2(x-1)$　より

$6-x=x-1$　　$x=\dfrac{7}{2}$　のとき．

また　$-x^2+7x-6=-\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$　は $2<x<5$ において　$x=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$ で最大値 $\dfrac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}$ をとり，このとき $(*)$ の右辺は最大となり，同時に $(*)$ の等号が成り立つ．

したがって，$\sqrt{uv}$ は $x=\dfrac{7}{2}$ のとき最大値　$\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{25}{4}=\dfrac{1}{2}(2\log_2 5-2)=\log_2 5-1$ をとる．

このとき　uv は最大値　$(\log_2\mathbf{5-1})^2$　をとる．

第４講　微分法・積分法①

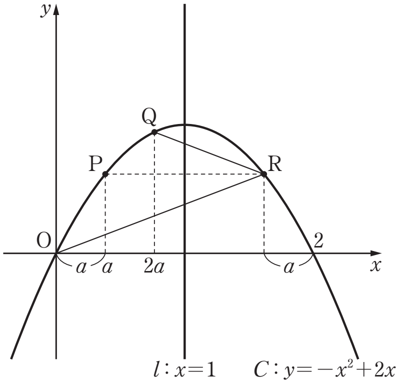
1　$C: y=-x^2+2x=-x(x-2)=-(x-1)^2+1$　より　$l: x=1$

(1)　図形の対称性より右図からＲの x 座標は $\boldsymbol{2-a}$

Ｒとの Ｑ の x 座標が一致するとき

$$2-a=2a \qquad a=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

以下，$0<a<\dfrac{2}{3}$ で考える．



(2)　$\mathrm{P}(a,\ 2a-a^2)$，$\mathrm{Q}(2a,\ 4a-4a^2)$，$\mathrm{R}(2-a,\ 2a-a^2)$

より四角形OPQRの面積 S は

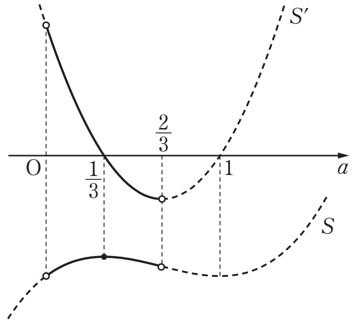
$S=\triangle\mathrm{OPR}+\triangle\mathrm{QPR}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{PR}\cdot$(△OPR と △QPR の高さの和)

$=\dfrac{1}{2}\cdot(2-2a)(4a-4a^2)=\boldsymbol{4(a^3-2a^2+a)}$

$S'=4(3a^2-4a+1)=4(3a-1)(a-1)$　$\left(0<a<\dfrac{2}{3}\right)$

よって，S は　$a=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$　で最大値をとる．



2　$C: y=\dfrac{1}{2}x^2-1$ より　$y'=x$

$\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ における C の接線 l の方程式は　$y=t(x-t)+\dfrac{1}{2}t^2-1$　　$y=tx-\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}t^2-1$

$\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ における C の法線 m の方程式は　$t\neq0$ のとき

$$y=-\frac{1}{t}(x-t)+\frac{1}{2}t^2-1=-\frac{1}{t}x+\frac{1}{2}t^2 \qquad \boldsymbol{2}x+\boldsymbol{2}ty=t^3 \quad (t=0 \text{ のときも成立})$$

これが $\mathrm{P}(1,\ k)$ を通るとき　$2+2kt=t^3$　　つまり　$t^3-\boldsymbol{2}kt-\boldsymbol{2}=0$ を満たす．

この式の左辺を $f(t)$ とすると　$f(t)=t^3-2kt-2$　　$f'(t)=3t^2-2k$

よって　$3t^2-2k=0$　　つまり　$t=\pm\sqrt{\dfrac{2k}{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{6k}}{3}$　のとき　$f'(t)=0$

ここで　$f(t)=f'(t)\cdot\dfrac{1}{3}t-\dfrac{4}{3}kt-2$ より，$f(t)$ は

$t=-\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{6}k}}{\boldsymbol{3}}$ のとき，極大値　$f\left(-\dfrac{\sqrt{6k}}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}k\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{6k}}{3}\right)-2=\dfrac{\boldsymbol{4\sqrt{6}}}{\boldsymbol{9}}k\sqrt{k}\boldsymbol{-2}$

$t=\dfrac{\sqrt{6k}}{3}$ のとき，極小値　$f\left(\dfrac{\sqrt{6k}}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}k\cdot\dfrac{\sqrt{6k}}{3}-2=-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}k\sqrt{k}-2$　をとる．

$k>0$ であることを考慮して

(極小値)$<0<$(極大値)　すなわち　$-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}k\sqrt{k}-2<0<\dfrac{4\sqrt{6}}{9}k\sqrt{k}-2$　となるのは

$k\sqrt{k}>\dfrac{9}{2\sqrt{6}}$　より　$k^3>\dfrac{27}{8}$　　よって　$k>\dfrac{3}{2}$ のとき

よって，$f(t)=0$ の解の個数は

$k>\dfrac{3}{2}$ のとき　**3** 個　　$k=\dfrac{3}{2}$ のとき　2 個　　$0<k<\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ のとき　**1** 個

3 (1)　$f(x)=2x^3-3x^2-36x+6$　より　$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x-3)(x+2)$

$f(x)$ は　$x=\mathbf{-2}$ のとき　極大値 **50**

$x=\mathbf{3}$ のとき　極小値 **−75** をとる．

(2)　$C：y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線 l は

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$　つまり　$y=(6a^2-6a-36)(x-a)+2a^3-3a^2-36a+6$ より

$$y=(6a^2-6a-36)x-4a^3+3a^2+6$$

よって　C と l の共有点の x 座標は　$f(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$　つまり

$f(x)-\{f'(a)(x-a)+f(a)\}=0$ の 2 解

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$
$$=2x^3-3x^2-36x+6-\{(6a^2-6a-36)x-4a^3+3a^2+6\}$$
$$=2x^3-3x^2-(6a^2-6a)x+a^2(4a-3)\quad\cdots\cdots①$$

C と l は $x=a$ で接するので，①は $(x-a)^2$ を因数にもつ．

x^3 の係数および定数項を参照して　①$=(x-a)^2(\mathbf{2}x+\mathbf{4}a-\mathbf{3})$

よって，C と l の共有点の x 座標は　$x=a,\ \mathbf{-2}a+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$　である．

また　$a=-2a+\dfrac{3}{2}$　　つまり　$a=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ のときは

C と l は接点以外に共有点をもたない．

第５講　微分法・積分法②

1 (1)　$C_1 : y=mx^2+nx$ が，点 A(1, 0) を通るので　$m+n=0$

また　C_1 の O における接線の傾きは 1 より　$y'=2mx+n$　から　$n=\mathbf{1}$

よって　$m=\mathbf{-1}$

$C_2 : y=px^3+qx^2+rx$ が点 A(1, 0), B(−1, 0) を通るので

$C_2 : y=px(x-1)(x+1)=px^3-px$ とおける．よって　$q=\mathbf{0}$

また，C_2 の O における接線の傾きは a より　$y'=3px^2-p$　から　$-p=a$　$p=\boldsymbol{-a}$

よって　$C_2 : y=-ax^3+ax$　より　$r=\boldsymbol{a}$

(2)　$C_1 : y=-x^2+x$，$C_2 : y=-ax^3+ax$ より，C_1，C_2 の交点の x 座標は

$$-x^2+x=-ax^3+ax \qquad x\{ax^2-x-(a-1)\}=0 \qquad x(x-1)(ax+a-1)=0$$

よって　$x=0,\ \mathbf{1},\ \dfrac{1-a}{a}=\boldsymbol{\dfrac{1}{a}-1}$　である．

C_1 と C_2 が $0<x<1$ で交点をもつのは $0<\dfrac{1}{a}-1<1$　$1<\dfrac{1}{a}<2$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<a<1}$

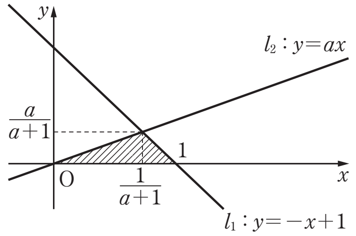
(3)　C_1 の A における接線 l_1 は　$y'=-2x+1$ より　$y=-(x-1)=\mathbf{-x+1}$

C_2 の O における接線 l_2 は　$y=ax$

l_1 と l_2 の交点の x 座標は　$-x+1=ax$　　$x=\dfrac{1}{a+1}$

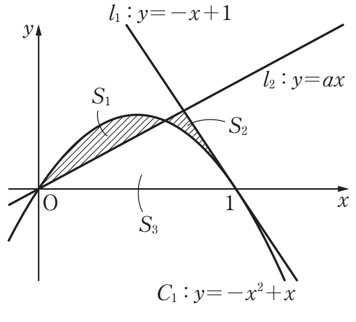
よって，x 軸と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{a}{a+1}=\boldsymbol{\frac{a}{2(a+1)}} \quad \cdots\cdots ①$$



また，x 軸と C_1 で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}} \quad \cdots\cdots ②$$



また，題意の S_1，S_2 に加え，右図のように S_3 を定めると

$S_1=S_2$ となるのは　$S_1+S_3=S_2+S_3$

すなわち，①＝② のときである．

$$\frac{a}{2(a+1)}=\frac{1}{6} \qquad 3a=a+1 \qquad ゆえに\quad a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

2 (1)　$C_1 : y=-x^2-4x=-x(x+4)$　$C_2 : y=-x^2+2x=-x(x-2)$

よって，C_1 と C_2 の交点 P(**0, 0**)

(2)　点 Q(−4, 0) における C_1 の接線の方程式は

$y'=-2x-4$　より　$y=4(x+4)=\mathbf{4x+16}$

点 R(2, 0) における C_2 の接線の方程式は

$y'=-2x+2$　より　$y=-2(x-2)=\mathbf{-2x+4}$

(3)　C_3 が 2 点 Q,R を通るとき　$C_3：y=-k(x+4)(x-2)=k(-x^2-2x+8)$　とおける．

これを　$C_3：y=k(-x^2+ax+b)$　と比較して　$a=\mathbf{-2}$，$b=\mathbf{8}$

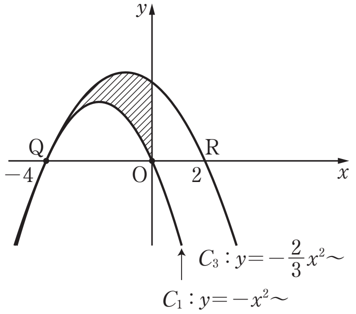
さらに，C_1 と C_3 が Q において共通接線をもつのは，Q における C_1 と C_3 の接線の傾きが等しいとき．

C_3 で　$y'=-2kx-2k$ より　$x=-4$ における C_1 と C_3 の接線の傾きを考えて

$6k=4$　　ゆえに　$k=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$ のとき．

このとき第 2 象限において，接する 2 曲線 C_1，C_3 および y 軸で囲まれる部分の面積は，

x^2 の係数の差が $\dfrac{1}{3}$ であることより　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot4^3=\mathbf{\dfrac{64}{9}}$



3　$f(x)=-x^2+2ax=-x(x-2a)$　　$g(x)=2x^2$

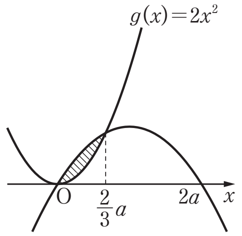
(1)　$F(x)=\displaystyle\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt=\int_0^x(-3t^2+2at)dt=\left[-t^3+at^2\right]_0^x=-x^3+\boldsymbol{a}x^2$

$f(x)-g(x)=-x(3x-2a)$ より

2 放物線の交点の x 座標は　$x=0$，$\dfrac{2}{3}a$

よって，2 放物線で囲まれた図形の面積 S は

$S=\dfrac{1}{6}\cdot3\cdot\left(\dfrac{2}{3}a\right)^3=\mathbf{\dfrac{4}{27}}a^3$

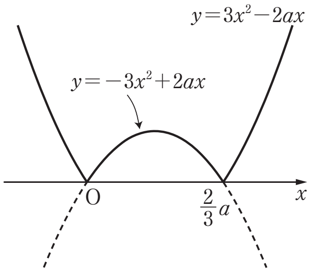


(2)　$y=|f(x)-g(x)|=|-x(3x-2a)|$ のグラフは右図．

よって　$\dfrac{2}{3}a<2$　つまり　$0<a<\mathbf{3}$ のとき

$T(a)=\dfrac{4}{27}a^3+\displaystyle\int_{\frac{2}{3}a}^{2}(3x^2-2ax)dx=\dfrac{4}{27}a^3+\left[x^3-ax^2\right]_{\frac{2}{3}a}^{2}$

$=\dfrac{4}{27}a^3+8-4a-\left(\dfrac{8}{27}a^3-\dfrac{4}{9}a^3\right)=\mathbf{\dfrac{8}{27}}a^3\mathbf{-4}a\mathbf{+8}$



$a\geqq3$ のとき　$T(a)=\displaystyle\int_0^2(-3x^2+2ax)dx=\left[-x^3+ax^2\right]_0^2=\mathbf{4}a\mathbf{-8}$

$a\geqq3$ のとき $T(a)$ は単調増加．

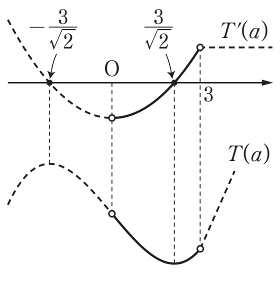
よって，$T(a)$ の最小値は $0<a<3$ のときを考えればよい．

$T'(a)=\dfrac{8}{9}a^2-4=\dfrac{4}{9}(2a^2-9)$

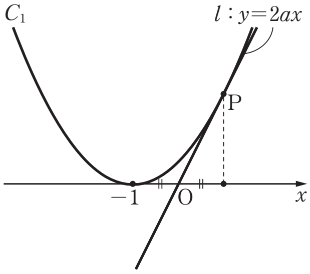
$a=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき　$T'(a)=0$

よって　$a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$　のとき

最小値　$T\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{8}{27}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3-4\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+8=\mathbf{8-4\sqrt{2}}$　をとる．



第６講　微分法・積分法③



1 (1)　$l : y=2ax$　$a>0$

放物線の２接線の交点の x 座標は，２接点の中央.

よって　C_1 と l の接点Ｐの座標は $(\mathbf{1},\ \mathbf{2a})$ である.

C_1 は題意より $y=k(x+1)^2$ とおける.

これが点Ｐを通るとき，$2a=4k$ より　$k=\dfrac{a}{2}$

よって　$C_1 : y=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}(x+1)^2$

次に，$C_2 : y=p(x-q)^2$ がＰを通るとき　$2a=p(1-q)^2$　……①

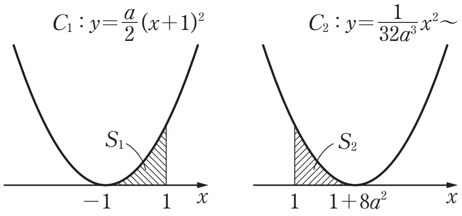
また，C_2 において　$y'=2p(x-q)$

よって，Ｐにおける C_2 の接線の傾きは　$2p(1-q)$

この接線が直線 l と直交するので　$2p(1-q)\cdot 2a=-1$　　$p(1-q)=-\dfrac{1}{4a}$　……②

②を①に代入して　$2a=(1-q)\cdot\left(-\dfrac{1}{4a}\right)$　　$1-q=-8a^2$　　ゆえに　$q=\mathbf{1}+\mathbf{8}a^2$

このとき②より　$p\cdot(-8a^2)=-\dfrac{1}{4a}$　　ゆえに　$p=\dfrac{1}{\mathbf{32}a^3}$　　よって，傾きは　$\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}$

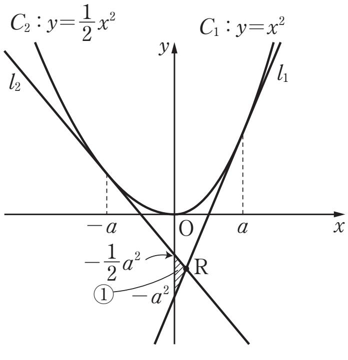


(2)　$S_1=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot 2^3=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}a$

$S_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{32a^3}\cdot(8a^2)^3=\dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}a^3$

よって　$3S_1=S_2$　となるのは

$4a=\dfrac{16}{3}a^3$　　$a^2=\dfrac{3}{4}$ より　$a=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$　(>0)



2　$C_1 : y=x^2$ より　$y'=2x$　よって，点 $\mathrm{P}(x=a)$ における接線は　$l_1 : y=2a(x-a)+a^2=\mathbf{2}\boldsymbol{a}x-a^2$

$C_2 : y=\dfrac{1}{2}x^2$ より　$y'=x$　よって，点 $\mathrm{Q}(x=-a)$ における接線は　$l_2 : y=-a(x+a)+\dfrac{1}{2}a^2=\boldsymbol{-a}x-\dfrac{1}{\mathbf{2}}a^2$

l_1 と l_2 の交点Ｒの x 座標は　$3ax=\dfrac{1}{2}a^2$ より　$x=\dfrac{a}{\mathbf{6}}$

このとき　$y=-\dfrac{2}{3}a^2$

$a=6x$　これを　$y=-\dfrac{2}{3}a^2$ に代入して　$y=\mathbf{-24}x^2$　点Ｒはこの放物線の上にある.

l_1，l_2，$x=0$ で囲まれた三角形の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{a}{6}=\dfrac{a^3}{\mathbf{24}}$　……①

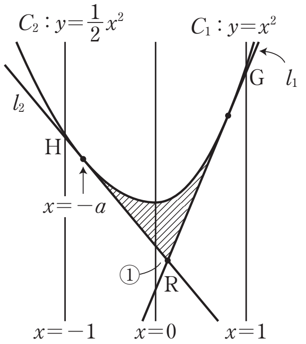
$$S(a)=\int_{-1}^{0}\{C_2-l_2\}dx+\int_{0}^{1}\{C_1-l_1\}dx-①$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}(x+a)^2dx+\int_{0}^{1}(x-a)^2dx-①$$

$$=\left[\frac{1}{6}(x+a)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{0}^{1}-①$$

$$=\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{6}(a-1)^3+\frac{1}{3}(1-a)^3-\frac{1}{3}(-a)^3-\frac{1}{24}a^3$$

$$=-\frac{1}{\mathbf{24}}a^3+\frac{\mathbf{3}}{2}a^2-\frac{\mathbf{3}}{2}a+\frac{\mathbf{1}}{2}$$

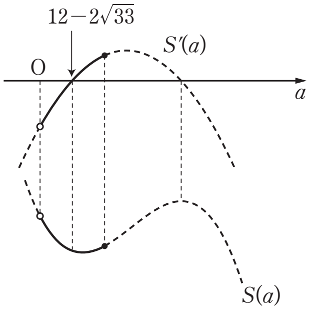


$$S'(a)=-\frac{1}{8}a^2+3a-\frac{3}{2}=-\frac{1}{8}(a^2-24a+12)$$

$a=12\pm2\sqrt{33}$ のとき　$S'(a)=0$

よって　$a=\mathbf{12}-2\sqrt{\mathbf{33}}$ のとき極小値をとり，

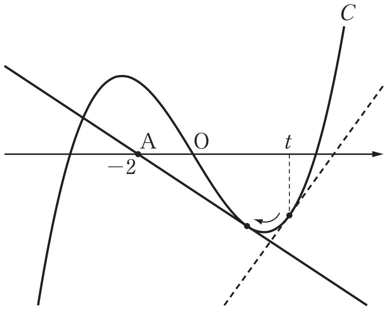
$S=S(a)$ のグラフの概形は⓪である．



3 (1)　$P(x)=x^3-(k+20)x-2k=0$　より　$x^3-20x=k(x+2)$

直線 $l:y=k(x+2)$ は定点 A$(\mathbf{-2},\ \mathbf{0})$ を通る．

また，$C:y=x(x^2-20)$ は x 軸と $x=0,\ \pm2\sqrt{5}$ で交わる．



C で　$y'=3x^2-20$ より，C の $x=t$ における接線は

$y=(3t^2-20)(x-t)+t^3-20t$

つまり　$y=(\mathbf{3}t^2-\mathbf{20})x-\mathbf{2}t^3$　これが A を通るとき

$0=(3t^2-20)\cdot(-2)-2t^3$　　$t^3+3t^2-20=0$

$(t-2)(t^2+5t+10)=0$　　ゆえに　$t=\mathbf{2}$

このときの接線は　$y=\mathbf{-8}x\mathbf{-16}=-8(x+2)$　これが A から C に引いた接線であり，$k=-8$ である．

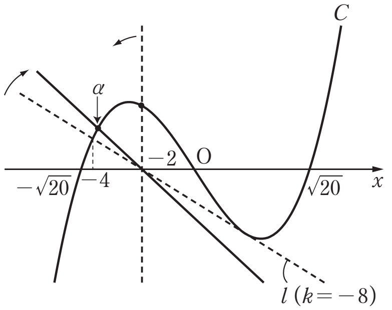
このとき，この接線と C の共有点の x 座標は

$x^3-20x=-8x-16$　　$x^3-12x+16=0$　　$(x-2)^2(x+4)=0$

よって　$x=\mathbf{-4},\ \mathbf{2}$

方程式 $P(x)=0$ の実数解は曲線 C と直線 l との共有点の x 座標である．したがって，この方程式がただ一つの実数解をもつときの k の取り得る値の範囲は，C と l の共有点が１つになるときで，グラフより　$k<\mathbf{-8}$

このときの実数解 α の取り得る値の範囲は，グラフより　　$\mathbf{-4}<\alpha<\mathbf{-2}$



⑵　$y=P(x)=x^3-(k+20)x-2k$　と　$y=Q(x)=x^3-kx^2-20x$　の交点は

$x^3-(k+20)x-2k=x^3-kx^2-20x$ より

$$k(x^2-x-2)=0$$

よって　$x=-1,\ 2$　（$k=0$ は題意を満たさない）

したがって，$1\leqq x\leqq 2$ においてはこの 2 つのグラフの上下が逆転することはない．

ゆえに　$\left|\int_1^2\{P(x)-Q(x)\}dx\right|=1$　より

$$\left|\int_1^2 k(x^2-x-2)dx\right|=1$$

$$\left|k\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2\right|=1$$

$$\left|k\left\{\frac{1}{3}(2^3-1^3)-\frac{1}{2}(2^2-1^2)-2(2-1)\right\}\right|=1$$

$\left|-\dfrac{7}{6}k\right|=1$　　ゆえに　$k=\pm\boldsymbol{\dfrac{6}{7}}$

第7講　数列①

1 (1)　$a_n=7+(n-1)\cdot(-4)=\mathbf{-4n+11}$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{7+(-4n+11)\}}{2}=\mathbf{-2n^2+9n}\quad\cdots\cdots①$$

(2)　$b_n=pn^2-qn-r$ について

$$b_{n+1}-2b_n=p(n+1)^2-q(n+1)-r-2(pn^2-qn-r)$$
$$=-pn^2+(2p+q)n+p-q+r$$

これと①を係数比較して　$-p=-2$，$2p+q=9$，$p-q+r=0$

ゆえに　$\mathbf{p=2}$，$\mathbf{q=5}$，$\mathbf{r=3}$　　このとき　$b_n=2n^2-5n-3$　より　$b_1=-6$

さらに　$c_{n+1}-2c_n=-2n^2+9n$　$\cdots\cdots$②，$c_1=1$ について

$b_{n+1}-2b_n=-2n^2+9n$　$\cdots\cdots$③，$b_1=\mathbf{-6}$

②−③ より　$(c_{n+1}-b_{n+1})-2(c_n-b_n)=0$　　よって　$d_n=c_n-b_n$ とおくと

$d_{n+1}-\mathbf{2}d_n=0$　つまり　$d_{n+1}=2d_n$，$d_1=c_1-b_1=7$

ゆえに，数列 $\{d_n\}$ は初項 7，公比 2 の等比数列より

$d_n=7\cdot2^{n-1}$　つまり　$c_n-b_n=7\cdot2^{n-1}$

よって　$c_n=\mathbf{7\cdot2}^{n-1}+2n^2-5n-3$　である．

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{7(2^n-1)}{2-1}+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$$
$$=7\cdot2^n-7+\frac{1}{3}n(2n^2+3n+1)-\frac{5}{2}(n^2+n)-3n$$
$$=7\cdot2^n+\frac{2}{3}n^3+n^2+\frac{1}{3}n-\frac{5}{2}n^2-\frac{5}{2}n-3n-7$$
$$=\mathbf{7\cdot2}^n+\mathbf{\frac{2}{3}}n^3-\mathbf{\frac{3}{2}}n^2-\mathbf{\frac{31}{6}}n-\mathbf{7}$$

2 (1)　初項を a，公比を r とすると

$a_1+a_2=32$ より　$a+ar=32$　　$a(1+r)=32$　$\cdots\cdots$①

$a_4+a_5=864$ より　$ar^3+ar^4=864$　　$ar^3(1+r)=864$　$\cdots\cdots$②

②に①を代入して　$32r^3=864$　　$r^3=27$　　よって　$r=3$　　このとき　$a=8$

よって　$a_n=\mathbf{8\cdot3}^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+4k-2)=\sum_{k=1}^{n}(8\cdot3^{k-1}+4k-2)=\frac{8(3^n-1)}{3-1}+\frac{n\{2+(4n-2)\}}{2}$$
$$=\mathbf{4\cdot3}^n+\mathbf{2}n^2-\mathbf{4}$$

(2)　$\dfrac{9}{37}=0.243243\cdots\cdots$ より，243 を周期 3 で繰り返すので

$b_{n+p}=b_n$ となる最小の自然数は　$p=\mathbf{3}$

このとき小数第 n 位に現れる数 b_n について　$100\div3=33\cdots1$ より

$$\sum_{k=1}^{100}b_k=(2+4+3)\cdot33+2=\mathbf{299}$$

3　$\{a_n\}$：2，4，8，16，32，64，128，256，512，1024，2048，……

(1)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=\mathbf{2^{n+1}-2}$

a_n を 10 で割った商 b_n と余り c_n について

（$a_n=10b_n+c_n$，b_n と c_n は整数，$0\leqq c_n<10$）

$c_1=\mathbf{2}$，$c_2=\mathbf{4}$，$c_3=\mathbf{8}$，$c_4=\mathbf{6}$，$c_5=\mathbf{2}$，$c_6=4$，……

よって，c_n は 2，4，8，6 を周期 4 で繰り返すので

$c_{n+p}=c_n$　となる最小の自然数は　$p=\mathbf{4}$

$p=4$ のとき

$n=pl+m=4l+m$　（l と m は整数で，$0\leqq m<4$　つまり　$m=0,1,2,3$）とすると，

n を 4 で割った商が l，余りが m である．

このとき　$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{4l+m}c_k=(2+4+8+6)\cdot l+$(最後の m 個の項の和)

$U_n-\mathbf{20}l=$(最後の m 個の項の和)　これは m だけで定まる．

これを d_m とおくと

$d_0=\mathbf{0}$，　$d_1=\mathbf{2}$，　$d_2=2+4=6$，　$d_{p-1}=d_3=2+4+8=\mathbf{14}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(10b_k+c_k)=10\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}c_k=\mathbf{10}T_n+U_n$　であるから

$T_n=\dfrac{1}{10}S_n-\dfrac{1}{10}U_n=\dfrac{1}{10}(2^{n+1}-2)-\dfrac{1}{10}(20l+d_m)$

$=\dfrac{\mathbf{2^n-1}}{\mathbf{5}}-\mathbf{2}l-\dfrac{d_m}{\mathbf{10}}$

(2)　a_n を 11 で割った余り e_n について

$\{e_n\}$：2，4，8，5，10，9，7，3，6，1，2，……

よって，e_n は周期 10 で繰り返すので

$e_{n+q}=e_n$　となる最小の自然数は　$q=\mathbf{10}$

このとき，$n=10l+m$（l と m は整数で，$0\leqq m<10$）と表すとき

$V_n=\sum_{k=1}^{n}e_k$ とおくと，

$V_n=(2+4+8+5+10+9+7+3+6+1)\cdot l+$(最後の m 個の項の和)　より

(1)と同様に，$V_n-\mathbf{55}l$ は m だけで定まる．

第8講　数列②

1　$a_n=a+(n-1)d$　$b_n=ar^{n-1}$　$(a\neq0,\ r\neq1)$

(1)　$a_5=b_2$ より　$a+4d=ar$　……①　$d=\dfrac{\mathbf{a(r-1)}}{\mathbf{4}}$

$a_{17}=b_3$ より　$a+16d=ar^2$　……②

②−①×4 より　$3a=4ar-ar^2$　$a\neq0$ より　$r^2-4r+3=0$　$r\neq1$ より　$r=\mathbf{3}$

このとき　$d=\dfrac{a}{\mathbf{2}}$　よって　$a_n=a+(n-1)\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}n+\dfrac{a}{2}$　$b_n=a\cdot3^{n-1}$

$a_m=b_n$ となるのは　$\dfrac{a}{2}m+\dfrac{a}{2}=a\cdot3^{n-1}$　$a\neq0$ より　$m+1=2\cdot3^{n-1}$

ゆえに　$m=\mathbf{2\cdot3^{n-1}-1}$ と表される.

(2)　$c_n=2\cdot3^{n-1}-1$ とおくと，$c_1=1$　この c_n が　$c_{n+1}=\alpha c_n+\beta$　を満たすとき.

つまり　$2\cdot3^n-1=2\alpha\cdot3^{n-1}-\alpha+\beta$

すなわち　$6\cdot3^{n-1}-1=2\alpha\cdot3^{n-1}-(\alpha-\beta)$

これがすべての自然数 n で成り立つのは

$2\alpha=6$　かつ　$\alpha-\beta=1$　つまり　$\alpha=3,\ \beta=2$　のとき

このとき　$c_{n+1}=\mathbf{3}c_n+\mathbf{2}$

$d_n=pc_n{}^2+3c_n+2$ $(p\neq0)$ と定めると

$$\begin{aligned}d_{n+1}-d_n&=(pc_{n+1}{}^2+3c_{n+1}+2)-(pc_n{}^2+3c_n+2)\\&=(c_{n+1}{}^2-c_n{}^2)p+3(c_{n+1}-c_n)\\&=(c_{n+1}-c_n)\{(c_{n+1}+c_n)p+3\}\\&=(2\cdot3^n-2\cdot3^{n-1})\{(2\cdot3^n+2\cdot3^{n-1}-2)p+3\}\\&=(4\cdot3^{n-1})(8\cdot3^{n-1}p-2p+3)\\&=32p\cdot3^{2(n-1)}+4\cdot3^{n-1}(-2p+3)\end{aligned}$$

これが等比数列になるのは　$p\neq0$ より　$-2p+3=0$　つまり　$p=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ のとき

（他に存在するか否かはマーク式のため未検証）

このとき　$d_{n+1}-d_n=48\cdot9^{n-1}$，$d_1=\dfrac{3}{2}c_1{}^2+3c_1+2=\dfrac{13}{2}$

よって，$n\geqq2$ のとき　$d_n=d_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}48\cdot9^{k-1}=\frac{13}{2}+\frac{48(9^{n-1}-1)}{9-1}=6\cdot9^{n-1}+\frac{1}{2}$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

ゆえに　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(6\cdot9^{k-1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{6(9^n-1)}{9-1}+\frac{1}{2}n=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}(\mathbf{9^n-1})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}n$

[2] 分ける前の数列の n 番目の項は n である.

第 n 群の末項を a_n とする.

(1) 第 n 群の末項はもとの数列の

第 $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{n\{1+(3n-2)\}}{2}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$ 項

よって　$a_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}$ より　$a_4=\dfrac{4\cdot11}{2}=\mathbf{22}$

a_n-a_{n-1} は $\{a_n\}$ の階差数列の第 $(n-1)$ 項. マークより, それは等差数列.

よって　$c_{n-1}=a_n-a_{n-1}$　とおくと

$\{c_n\}$ の初項は　$c_1=a_2-a_1=4$

$c_2=a_3-a_2=7$　より　公差は　3

よって　$c_n=4+(n-1)\cdot3=3n+1$

ゆえに　$a_n-a_{n-1}=c_{n-1}=3(n-1)+1=3n-2$

ここで, 600 が第何群に入っているかを考えるために a_n を利用する.

$a_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}n^2-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}n\fallingdotseq\dfrac{3}{2}n^2$ と考えると　$\dfrac{3}{2}n^2=600$ より　$n^2=400$

よって　$n=20$

$a_{20}=590$ より第 20 群の末項は 590

ゆえに, 600 は第 **21** 群の **10** 番目の数である.

【参考】　$a_n-a_{n-1}=3n-2$ から a_n をまともに出すと以下.

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(3k-2)=1+\frac{(n-1)\{4+(3n-2)\}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{n(3n-1)}{2}$$　（$n=1$ のときも成り立つ）

(2) 第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項 b_n について

第 n 群の末項は　$a_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}$　より

$$b_n=a_n+2n=\frac{n(3n-1)}{2}+2n=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}n^2+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}n=\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\frac{1}{b_n}=\frac{2}{3n(n+1)}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\mathbf{1}}\right)$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3n+3}}$$

3　$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n+a_{n+1}=\frac{1}{n(n+2)}$　より

$$S_3=a_1+(a_2+a_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}=\mathbf{\frac{5}{8}}\qquad S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{6}{15}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{\mathbf{2}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-\mathbf{1}}-\frac{1}{2k+\mathbf{1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2m+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{2m+1}=\frac{m}{\mathbf{2m+1}}$$

$$S_{2m+1}=a_1+\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}+a_{2k+1})=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathbf{4}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\mathbf{1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{3(m+1)-1}{4(m+1)}=\frac{\mathbf{3m+2}}{\mathbf{4(m+1)}}$$

$m\geqq 2$ のとき

$$a_{2m}=S_{2m}-S_{2m-1}=\frac{m}{2m+1}-\frac{3m-1}{4m}=\frac{4m^2-(2m+1)(3m-1)}{4m(2m+1)}$$

$$=\frac{\mathbf{-2m^2-m+1}}{\mathbf{4m(2m+1)}}\quad\cdots\cdots①$$　（$m=1$ のときも成り立つ）

（また，$a_{2m}+a_{2m+1}=\frac{1}{2m(2m+2)}$　より

$$a_{2m+1}=\frac{1}{2m(2m+2)}-a_{2m}=\frac{1}{4m(m+1)}-\frac{-2m^2-m+1}{4m(2m+1)}$$

$$=\frac{2m+1-(m+1)(-2m^2-m+1)}{4m(m+1)(2m+1)}=\frac{2m^3+3m^2+2m}{4m(m+1)(2m+1)}$$

$$=\frac{2m^2+3m+2}{4(m+1)(2m+1)}\quad\cdots\cdots②$$

マークする部分がないため計算不要．）

$2m=n$ とおくと　$m=\frac{n}{2}$　　このとき，①より

$$a_n=\frac{-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1}{2n(n+1)}=\frac{-n^2-n+2}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-n^2-n+2}{n^2+n}=\frac{1}{4}\left(-1+\frac{2}{n^2+n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{4}$$

（$2m+1=n$ とおくと　$m=\frac{n-1}{2}$　　このとき②より

$$a_n=\frac{\frac{(n-1)^2}{2}+3\cdot\frac{n-1}{2}+2}{4\left(\frac{n-1}{2}+1\right)n}=\frac{n^2+n+2}{4(n+1)n}=\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2+n+2}{n^2+n}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{n^2+n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n(n+1)}+\frac{1}{4}$$

マークを埋めるためだけなら計算不要．）

よって　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=\frac{1}{\mathbf{2n(n+1)}}+\frac{\mathbf{(-1)}^{n+1}}{\mathbf{4}}$　（$n=1$ のときも成り立つ）

第９講　ベクトル①

1　$5\overrightarrow{PA}+a\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より

$-5\overrightarrow{AP}+a(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$　　$(a+6)\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

（P は △ABC の内部の点より　$a>0$　すなわち　$a+6\neq0$，$a+1\neq0$　であるから）

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\boldsymbol{a}}{a+\boldsymbol{6}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boldsymbol{1}}{a+\boldsymbol{6}}\overrightarrow{AC}=\frac{a+1}{a+6}\left(\frac{a}{a+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{a+1}\overrightarrow{AC}\right)$$

よって，直線 AP と辺 BC との交点を D とすると，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{a}{a+1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{a+1}\overrightarrow{AC}$　であり，

点 D は辺 BC を $1:a$ に内分する.

点 D が辺 BC を $1:8$ に内分するならば，（$1:a=1:8$ より）　$a=\boldsymbol{8}$ となり，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{14}}\overrightarrow{AD}$　となる．このとき点 P は線分 AD を **9：5** に内分する.

さらに，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6}$　ならば

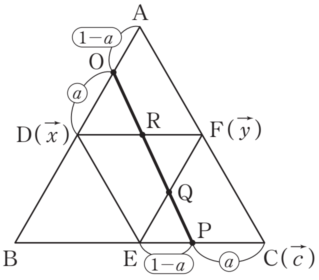
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2-(\sqrt{10})^2}{2}=\frac{8+6-10}{2}=\boldsymbol{2}$$　である.

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおくと　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{14}\vec{b}+\dfrac{1}{14}\vec{c}=\dfrac{1}{14}(8\vec{b}+\vec{c})$

したがって

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{14^2}|8\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{14^2}(64|\vec{b}|^2+16\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)=\frac{1}{14^2}(64\times8+16\times2+6)$$

$$=\frac{550}{14^2}=\frac{275}{14\times7}=\frac{\boldsymbol{275}}{\boldsymbol{98}}$$



2　(1)　$|\vec{x}|=|\vec{y}|=\boldsymbol{1}$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$

(2)　$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\vec{y}-\vec{x}$

よって　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EP}$

$=a\vec{x}+\vec{y}+(1-a)(\vec{y}-\vec{x})$

$=(\boldsymbol{2a-1})\vec{x}+(\boldsymbol{2-a})\vec{y}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=(2a-1)^2|\vec{x}|^2+2(2a-1)(2-a)\vec{x}\cdot\vec{y}+(2-a)^2|\vec{y}|^2$

$=(2a-1)^2+(2a-1)(2-a)+(2-a)^2=3a^2-3a+3=\boldsymbol{3}(a^2-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1})$

(3)　$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=(2a-1)k\vec{x}+(2-a)k\vec{y}$　……①　とおける.

また　$FQ:QE=t:(1-t)$　とおくと

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FQ}=-(1-a)\vec{x}+\vec{y}+t\vec{x}=(a+t-1)\vec{x}+\vec{y}$　……②

$\vec{x}$，$\vec{y}$ は１次独立より，①②から

$(2a-1)k=a+t-1$，$(2-a)k=1$　　ゆえに　$k=\dfrac{1}{2-a}$，$t=\dfrac{a^2-a+1}{2-a}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{a}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=m\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2a-1)m\vec{x}+(2-a)m\vec{y}$　……③　とおける．

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-a)\vec{x}+(2a-1)m\vec{x}+(2-a)m\vec{y}$

$=\{(1-a)+(2a-1)m\}\vec{x}+(2-a)m\vec{y}$

D，R，F は一直線上より　$\{(1-a)+(2a-1)m\}+(2-a)m=1$　　$m=\dfrac{a}{a+1}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}+\mathbf{1}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{x}$ のなす角 θ について

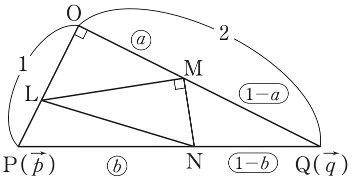
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{x}=\{(2a-1)\vec{x}+(2-a)\vec{y}\}\cdot\vec{x}=(2a-1)+\dfrac{1}{2}(2-a)=\dfrac{3}{2}a$　より

$$(\cos\theta)^2=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{x}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{x}|}\right)^2=\frac{\frac{9}{4}a^2}{3(a^2-a+1)\times1}=\frac{\mathbf{3}a^2}{\mathbf{4}(a^2-a+1)}$$

$\theta=45^\circ$ のとき　$\dfrac{3a^2}{4(a^2-a+1)}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$　　$a^2+2a-2=0$

ゆえに　$a=\mathbf{-1}+\sqrt{\mathbf{3}}$　(>0)

3　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{p}-\boldsymbol{a}\vec{q}=\dfrac{1}{3}(2\vec{p}-3a\vec{q})$



また，$|\vec{p}|=1$，$|\vec{q}|=2$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{ML}}|^2=\dfrac{1}{3^2}|2\vec{p}-3a\vec{q}|^2=\dfrac{1}{3^2}(4\times1^2+9a^2\times2^2)$

$=\dfrac{4(1+9a^2)}{3^2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{ML}}|=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{1+\mathbf{9}a^2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-b)\vec{p}+b\vec{q}-a\vec{q}=(1-\boldsymbol{b})\vec{p}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\vec{q}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{ML}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$ より

$\dfrac{1}{3}(2\vec{p}-3a\vec{q})\cdot\{(1-b)\vec{p}+(b-a)\vec{q}\}=0$

$2(1-b)\times1-3a(b-a)\times4=0$　　$(1+6a)b=1+6a^2$　　ゆえに　$b=\dfrac{\mathbf{1}+\mathbf{6}a^2}{\mathbf{1}+\mathbf{6}a}$

$1-b=1-\dfrac{1+6a^2}{1+6a}=\dfrac{6a-6a^2}{1+6a}=\dfrac{6a(1-a)}{1+6a}$　　$b-a=\dfrac{1+6a^2}{1+6a}-a=\dfrac{1-a}{1+6a}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{1-a}{1+6a}(6a\vec{p}+\vec{q})$　より

$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\left(\dfrac{1-a}{1+6a}\right)^2(36a^2\times1+4)=\left(\dfrac{1-a}{1+6a}\right)^2\times4(1+9a^2)$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\dfrac{\mathbf{2}(\mathbf{1}-a)}{1+6a}\sqrt{1+\mathbf{9}a^2}$

(3)　△LMN∽△QOP より　MN：ML＝OP：OQ＝1：2

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{ML}}|=\mathbf{2}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$　であるから

$$\frac{2}{3}\sqrt{1+9a^2}=2\times\frac{2(1-a)}{1+6a}\sqrt{1+9a^2} \qquad 1+6a=6(1-a) \qquad a=\mathbf{\frac{5}{12}},\ b=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{LR}}=s\overrightarrow{\mathrm{LN}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-s)\times\frac{2}{3}\vec{p}+s\left(\frac{5}{12}\vec{p}+\frac{7}{12}\vec{q}\right)$

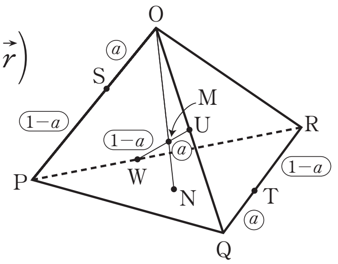
$$=\left(\mathbf{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\mathbf{4}}s\right)\vec{p}+\frac{7}{12}s\vec{q}$$

R が OQ 上の点であるとき　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\vec{q}$　と表せる.

したがって　$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}s=0$　　ゆえに　$s=\mathbf{\frac{8}{3}}$

第 10 講　ベクトル②

1 (1) $\overrightarrow{OS}=\boldsymbol{a}\vec{p}$　$\overrightarrow{OT}=(\boldsymbol{1-a})\vec{q}+\boldsymbol{a}\vec{r}$



$\overrightarrow{OM}=(1-a)\overrightarrow{OU}+a\overrightarrow{OW}=(1-a)\times\frac{1}{2}\vec{q}+a\left(\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\{\boldsymbol{a}\vec{p}+(\boldsymbol{1-a})\vec{q}+\boldsymbol{a}\vec{r}\}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT})$

よって，点 M は線分 ST の中点.

ゆえに　SM : ST＝1 : **2**

また　$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}ak\vec{p}+\frac{1}{2}(1-a)k\vec{q}+\frac{1}{2}ak\vec{r}$　とおくと

N は平面 PQR 上より　$\frac{1}{2}ak+\frac{1}{2}(1-a)k+\frac{1}{2}ak=1$　　$(a+1)k=2$　　$k=\frac{2}{a+1}$

よって　$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{\frac{2}{a+1}}\overrightarrow{OM}=\frac{a}{a+1}\vec{p}+\frac{1-a}{a+1}\vec{q}+\frac{a}{a+1}\vec{r}$

さらに，点 N が三角形 PQR の重心と一致しているとき　$\frac{a}{a+1}=\frac{1}{3}$

よって　$a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $|\vec{p}|=|\vec{q}|=\sqrt{2}$，$|\vec{r}|=1$，$\vec{p}\cdot\vec{r}=0$

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$　より　$\frac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})\cdot(\vec{q}-\vec{p})=0$

$\vec{p}\cdot\vec{q}-|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2-\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}\cdot\vec{r}-\vec{p}\cdot\vec{r}=0$　　よって　$\vec{q}\cdot\vec{r}=\boldsymbol{0}$

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{QR}=0$　より　$\frac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})\cdot(\vec{r}-\vec{q})=0$

$\vec{p}\cdot\vec{r}-\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}\cdot\vec{r}-|\vec{q}|^2+|\vec{r}|^2-\vec{r}\cdot\vec{q}=0$　　よって　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\boldsymbol{-1}$

$\cos\angle POQ=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$　　ゆえに　$\angle POQ=\boldsymbol{120^\circ}$

$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{3^2}|\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}|^2=\frac{1}{3^2}(2+2+1-2)=\frac{3}{3^2}$　　ゆえに　$OG=|\overrightarrow{OG}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

2 (1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=\boldsymbol{0}$，$\vec{q}\cdot\vec{r}=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BY}=(\boldsymbol{1-a})\vec{p}+\boldsymbol{b}\vec{r}$

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot(\vec{q}+\vec{r})=|\vec{q}|^2-|\vec{r}|^2=\boldsymbol{0}$

(2) EC⊥平面 α より　$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}=0$　かつ　$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XY}=0$

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XY}=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot\{(1-a)\vec{p}+b\vec{r}\}=0$

$(1-a)+\frac{1}{2}b-b=0$　　ゆえに　$\boldsymbol{2}a+b=2$

以下，$b=\frac{1}{2}$ とする．このとき　$a=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$　である.

$\overrightarrow{\mathrm{EK}}=c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+c\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\vec{r}+c(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})=c\vec{p}+c\vec{q}+(1-c)\vec{r}$$

また，点 K は平面 α 上より

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}+s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\frac{3}{4}\vec{p}+s\left(\frac{1}{4}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)+t(\vec{q}+\vec{r})$$

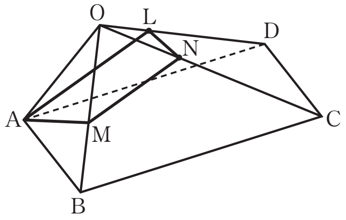
$$=\left(\frac{1}{\mathbf{4}}s+\frac{3}{4}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{\mathbf{2}}s+t\right)\vec{r}$$

$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は 1 次独立より　$c=\frac{1}{4}s+\frac{3}{4}$，$t=c$，$\frac{1}{2}s+t=1-c$　　よって　$c=t=\mathbf{\frac{5}{8}}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{EC}}|^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2|\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}|^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2(1+1+1-1)=\left(\frac{5}{8}\right)^2\times 2$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|=\mathbf{\frac{5\sqrt{2}}{8}}$

3　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{a}=-\mathbf{\frac{2}{3}}\vec{a}-\frac{\mathbf{1}}{3}\vec{b}+\frac{\mathbf{1}}{3}\vec{c}$



$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表すとき

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　より

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

$$=\vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\mathbf{3}}+\frac{t}{\mathbf{2}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\mathbf{3}}\vec{c}$$

また，N は辺 OC 上より　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\vec{c}$ と表せる．

よって　$1-\frac{2}{3}s-t=0$，$-\frac{s}{3}+\frac{t}{2}=0$　　$s=\frac{3}{4}$，$t=\frac{1}{2}$　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\mathbf{\frac{1}{4}}\vec{c}$　となる．

また，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2r$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1+1-(2r)^2}{2}=\mathbf{1-2r^2}$

$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2$ より　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1+3-4}{2}=\mathbf{0}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=4r^2+4$ より　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1+3-(4r^2+4)}{2}=\mathbf{-2r^2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

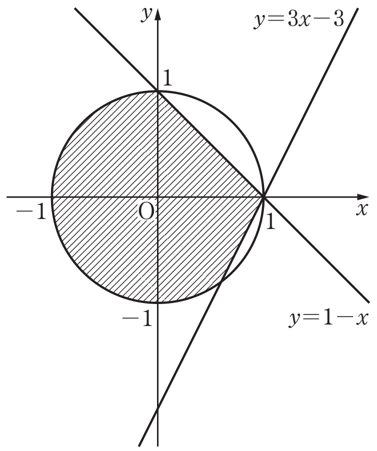
$$=\frac{1}{8}(\vec{b}-2\vec{a})\cdot(\vec{c}-2\vec{b})=\frac{1}{8}\{-2\times1^2-2\times(-2r^2)+4(1-2r^2)\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r^2$$

よって　$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r^2=0$　　$r^2=\frac{1}{2}$　　$r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (>0)

つまり　$\mathrm{AB}=\mathbf{\sqrt{2}}$　のとき $\mathrm{AM}\perp\mathrm{MN}$ となる．

補講　　図形と方程式

1　連立方程式 $x^2+y^2 \leqq 1$，$x+y \leqq 1$，$3x-y \leqq 3$ の表す領域は右図のようになる．



(1)　C と $x+y=1$ の共有点の座標は，右図より

$(0,\ \mathbf{1})$，$(\mathbf{1},\ 0)$

C と直線 $3x-y=3$ の共有点の座標は，

$y=3x-3$ と $x^2+y^2=1$ より

$x^2+(9x^2-18x+9)=1$

$5x^2-9x+4=0$

$(x-1)(5x-4)=0$ より

$x=1,\ \dfrac{4}{5}$

よって求める座標は $\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}},\ -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)$，$(\mathbf{1},\ 0)$　……(答)

(2)　直線 l の方程式は　$y=a\left(x-\dfrac{5}{3}\right)$　つまり　$3ax-3y-5a=0$

これと $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ の距離が C の半径 1 と等しいので

$\dfrac{|-5a|}{\sqrt{9a^2+9}}=1$　　$(5a)^2=9a^2+9$　　$a^2=\dfrac{9}{16}$　　よって $a=\pm\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

次に接点の座標を求める．図形の対称性より，接線の傾きが正であるときを考える．

$a=\dfrac{3}{4}$ のとき　このとき直線 l と垂直で，円の中心 $(0,\ 0)$ を通る直線は $y=-\dfrac{4}{3}x$ である．これを$x^2+y^2=1$ と連立させると

$x^2+\left(-\dfrac{4}{3}x\right)^2=1$　　$x^2=\dfrac{9}{25}$　　$x=\pm\dfrac{3}{5}$　　図より $x=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$　これが接点の x 座標

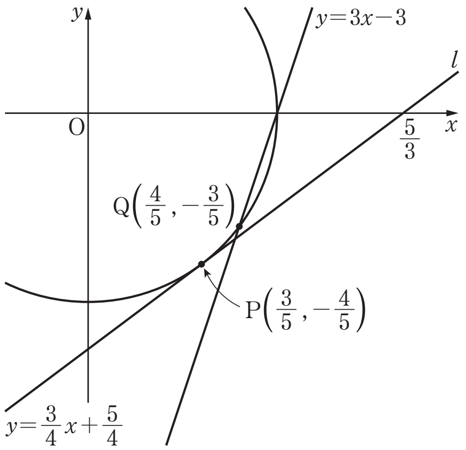
この接点は，領域 D 内に存在する．

右図より，l と D が共有点をもつとき

a の最大値は，l が円と接し，傾きが正であるときの値で　$a=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

最小値は l が $(0,\ 1)$ を通るときの傾きで，

$a=\dfrac{0-1}{\dfrac{5}{3}-0}=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$



2 (1) OP：AP$=\sqrt{3}$：1　より　OP$=\sqrt{3}$AP　　よって　$OP^2=\mathbf{3}AP^2$

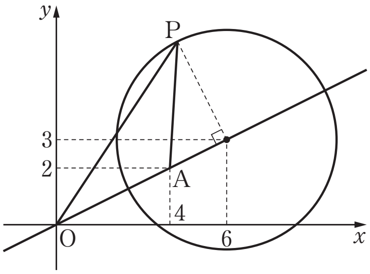
P$(x,\ y)$ とおくと，$x^2+y^2=3\{(x-4)^2+(y-2)^2\}$

$x^2-12+y^2-6y+30=0$

よって点 P の軌跡 C の方程式は　$(x-\mathbf{6})^2+(y-\mathbf{3})^2=\mathbf{15}$　……①

P が円 C 上を動くとき，△OAP の高さが最大になるのは，直線 OA が円によって切り取られる弦の垂直二等分線上に点 P があるときである.

その弦は円の直径であり，求める高さは円の半径である.



したがって，求める高さの最大値は　$\sqrt{\mathbf{15}}$

底辺は OA$=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ より，

三角形の面積の最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}=\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}$

OA の傾きは $\dfrac{1}{2}$ より，垂直二等分線の方程式は　$y=-2(x-6)+3=-2x+15$

これを①に代入して　$(x-6)^2+(-2x+12)^2=15$　　$(x-6)^2=3$　　$x=6\pm\sqrt{3}$

よって点 P の座標は　$(\mathbf{6}+\sqrt{\mathbf{3}},\ \mathbf{3}-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})$ または $(6-\sqrt{3},\ 3+2\sqrt{3})$

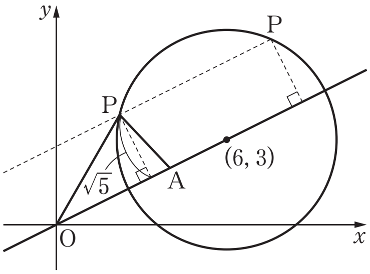
(2) △OAP の面積が 5 になるときの高さを h とすると

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot h=5$　より　$h=\sqrt{\mathbf{5}}$

これが直線 OA：$x-2y=0$ と点 P との距離である.

これを満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$\dfrac{|x-2y|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$



点 P は直線より上側より　$x-2y<0$

よって　$\dfrac{-(x-2y)}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$　より　$y=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x+\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$　……②

②を①に代入して　$(x-6)^2+\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}-3\right)^2=15$　　$x^2-10x+17=0$

$x=5\pm 2\sqrt{2}$

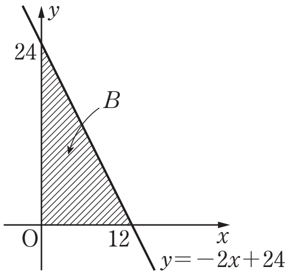
よって点 P の座標は $(\mathbf{5}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}},\ \mathbf{5}+\sqrt{\mathbf{2}})$ または $(5-2\sqrt{2},\ 5-\sqrt{2})$

3　(1)　$x^2-2ax+y^2-4y+a^2\leqq 0$　より　$(x-\boldsymbol{a})^2+(y-\boldsymbol{2})^2\leqq \boldsymbol{4}$

よって，領域 A は点 $(a,\ 2)$ を中心とする半径 **2** の円とその内部である．

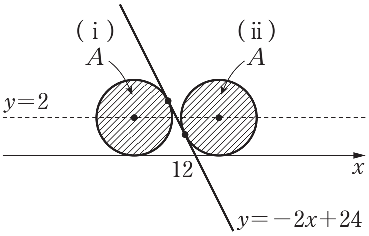
(2)　$y\leqq -2x+24$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の表す領域 B は

右図斜線部（境界含む）



点 $(a,\ 2)$ を中心とする半径 2 の円が，

直線 $2x+y=24$ と接するのは下図の場合



よって，領域 A と領域 B の共通部分は，

(ⅰ)　**領域 A と一致する　または**　(ⅱ)　**1 点のみからなる**．

(3)　円 $(x-a)^2+(y-2)^2=4$ と直線 $2x+y-24=0$ が接するのは

$$\frac{|2a+2-24|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\quad つまり\quad |2a-22|=2\sqrt{5}\ のとき$$

このうち，円が直線の上側で接するとき，

$y\geqq -2x+24$ に点 $(a,\ 2)$ があるので，$2\geqq -2a+24$　つまり　$2a-22\geqq 0$

よって　$2a-22=2\sqrt{5}$　より　$a=11+\sqrt{5}$ のとき

また，円が直線の下側で接するとき，$-2a+22=2\sqrt{5}$　より　$a=11-\sqrt{5}$ のとき

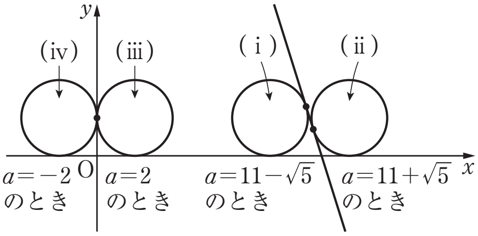
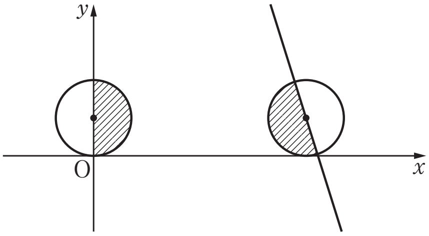
円が y 軸と y 軸の左側で接するのは　$a=-2$ のとき

右側で接するのは　$a=2$ のとき

領域 A と領域 B が共通部分をもつような a の範囲は，左下図(ⅱ)から(ⅳ)の間に円があるときで，$\boldsymbol{-2\leqq a\leqq 11+\sqrt{5}}$

共通部分 C が領域 A と一致するような a の範囲は，左下図(ⅰ)から(ⅲ)の間に円があるときで，$\boldsymbol{2}\leqq a\leqq 11-\sqrt{5}$

共通部分 C の面積が領域 A の面積の半分にあるのは，

領域の境界線 $x=0$，$y=-2x+24$ が円の中心を通るとき（右下図参照）

よって　$a=0$，$2=-2a+24$　より　$a=\boldsymbol{0}$，**11** のとき